Curso de electromagnetismo -Capítulo 2-Eletrostática

Rubens Amaral

Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense

Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil

4 de janeiro de 2016

Capítulo 2

Eletrostática no vácuo

2.1 Equações de Maxwell e Eletrostática

Os fenômenos eletromagnéticos são descritos supondo-se que em cada ponto do espaço haja um vetor $\vec{E}$ e um vetor $\vec{B}$, formando assim os campos elétrico e magnético. A dinâmica destes campos é descrita pelas equações de Maxwell no vácuo, a partir das fontes: densidades escalar de cargas $\rho(\vec{r})$ e vetorial de corrente $\vec{J}(\vec{r})$. Temos assim

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \text{Lei de Gauss} \\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Lei de Faraday} \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{Lei de Ampére modificada}
\end{aligned}$$

Estudaremos inicialmente situações (eletrostática) em que estaremos interessados no campo elétrico na ausência de campos magnéticos variáveis, $\partial_t\vec{B}=0$, o que pressupõe densidades de cargas não variáveis, $\partial_t\rho=0$. Ficamos então com as equações básicas:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{1.1}$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0. \tag{1.2}$$

A questão que nos colocamos então é: Dada uma distribuição de cargas, descrita por uma densidade volumétrica de cargas $\rho(\vec{r})$, qual é o campo elétrico obtido? A resposta a esta pergunta é fornecida, desde que sob condições adequadas, pelo teorema de Helmholtz. Se conhecemos a densidade de carga e sabemos que ela decresce mais rapidamente do que $1/r^2$ a grandes distâncias e que o campo elétrico decresce também com a distância (isto é fisicamente equivalente a dizer que o campo é devido somente à distribuição localizada de cargas) então o campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{1.3}$$

com

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|}d^3r', \tag{1.4}$$

e onde $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Observe que o campo eletrostático (vetorial) é obtido do chamado potencial escalar ou campo escalar ϕ. Este por sua vez é escrito como a superposição linear das contribuições das cargas em cada ponto do espaço - esta é a interpretação física da integral. O fator $1/|\Delta\vec{r}|$ é característico da lei de Coulomb, como logo veremos. Aplicando as derivadas, usando que $\partial_i(x_jx_j)^\nu = 2\nu(x_jx_j)^{\nu-1}x_k\delta_{ki} = 2\nu(x_jx_j)^{\nu-1}x_i$, vemos que o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r'\rho(\vec{r}')\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r'\rho(\vec{r}')\frac{\hat{\Delta r}}{|\Delta\vec{r}|^2}. \tag{1.5}$$

Novamente o aspecto mais marcante está em que esta expressão pode ser vista como a superposição linear dos vetores $\vec{E}$ criados por cada carga no espaço. Esta expressão pode ser generalizada para distribuições de carga que não sejam volumétricas. Uma densidade volumétrica de cargas devida a uma coleção de cargas pontuais q_i localizadas nos pontos r_i' pode ser descrita por meio de funções delta de Dirac

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i'). \tag{1.6}$$

Neste caso teremos então uma soma *vetorial* de contribuições de cada carga pontual, a forma mais usual da lei de Coulomb:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_i\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \tag{1.7}$$

Exercício: Obtenha a equação (1.7) a partir de (1.6) e de (1.5).

No caso de uma distribuição linear de cargas podemos descrever a densidade de cargas como:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{l_1}^{l_2} \lambda(l)\delta(\vec{r} - \vec{r}'(l))dl, \tag{1.8}$$

onde $\vec{r}'(l)$ é a representação paramétrica da curva onde está presente a densidade linear de cargas λ.

Por outro lado uma densidade superficial σ numa superfície S pode ser descrita pela densidade volumétrica

$$\rho(\vec{r}) = \int_S \sigma(a)\delta(\vec{r} - \vec{r}'(a))da, \tag{1.9}$$

onde da representa o elemento de superfície e $\vec{r}'(a)$ descreve a superfície.

Exercício: Obtenha as expressões a seguir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \lambda(l)\frac{\vec{r} - \vec{r}'(l)}{|\vec{r} - \vec{r}'(l)|^3}dl \tag{1.10}$$

e

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \sigma(a)\frac{\vec{r}-\vec{r}'(a)}{|\vec{r}-\vec{r}'(a)|^3}da. \tag{1.11}$$

Poderíamos ter tomado o caminho inverso e partido da expressão do campo elétrico dada pela lei de Coulomb eq. (1.5) e obter a partir daí a expressão do campo escalar e também a lei de Gauss. De fato usando que $\Delta\vec{r}/(\Delta r^2) = -\vec{\nabla}\Delta r^{-1}$ uma integração por partes na eq. (1.5) leva à expressão do campo elétrico em termos do campo escalar. Por outro lado Basta tomar a divergência da mesma equação para obter a lei de Gauss diferencial. Como ressaltamos no início, a aplicação do teorema de Helmholtz depende de condições técnicas de comportamento assintótico. Isto pode sugerir alguma restrição à aplicabilidade do método acima e portanto á própria lei de Coulomb. Este não é o caso. Nas condições em que não se pode aplicar o Teorema de Helmholtz o campo elétrico, na eletrostática, ainda é dado pela lei de Coulomb. Pode acontecer porém de conhecermos somente parte das cargas e o campo observado depender de distribuições de cargas fora da região de observação do campo ou mesmo no infinito. *

2.1.1 Exemplos

Exemplo 1: Cálculo do campo criado por uma distribuição linear reta de cargas ao longo do eixo x desde $-L'$ até L. O campo será calculado em pontos ao longo do eixo z.

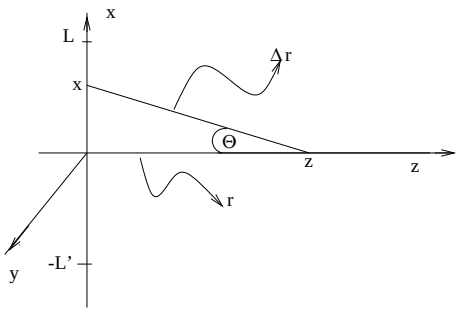

Figura 2.1: Distribuição linear de cargas.

Podemos calcular cada componente separadamente. Primeiro o componente ao longo do eixo z

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L'}^{L} \lambda\cos\theta\frac{dx}{\Delta r^2}. \tag{1.13}$$

Podemos utilizar que $\cos\theta = z/\Delta r$ *e* $x/z = \tan\theta$ *para fazer a mudança de variável de integração para* θ*. Com isto a integral fica imediata*

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta(-L')}^{\theta(L)} \lambda\cos\theta\frac{\cos^2\theta}{z^2}\frac{zd\theta}{\cos\theta^2} \tag{1.14}$$

*Estou supondo bem conhecido, e portanto não estou discutindo, que a força a que uma partícula de carga q está sujeita em um ponto do espaço co onde haja campo elétrico e magnético presentes é dada pela lei de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V}\times\vec{B}, \tag{1.12}$$

que em nosso caso se reduz à força elétrica dada pelo primeiro termo.

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z}\left(\sin\theta\left(L\right) - \sin\theta\left(-L'\right)\right) \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\lambda L}{z\sqrt{z^2+L^2}} + \frac{\lambda L'}{z\sqrt{z^2+L'^2}}\right). \tag{1.16}$$

O componente na direção x fica

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta(-L')}^{\theta(L)} \lambda\sin\theta\frac{\cos\theta^2}{z^2}\frac{zd\theta}{\cos\theta^2} \tag{1.17}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z}\left(\cos\theta(L) - \cos\theta(-L')\right) \tag{1.18}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{z^2+L^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{z^2+L'^2}}\right). \tag{1.19}$$

O componente na direção y é identicamente nulo. No caso de o eixo z ser a mediatriz do segmento, $L = L'$, o componente x também é nulo. Pode-se generalizar então o resultado para a componente radial cilíndrica do campo elétrico em pontos não restritos ao plano zx.

Exemplo 2: Campo de uma distribuição superficial com simetria esférica com raio R. Vamos centrar a esfera na origem e calcular o campo no eixo z. O campo em um ponto qualquer será obtido usando a simetria esférica, simplesmente rodando este campo para qualquer ponto.

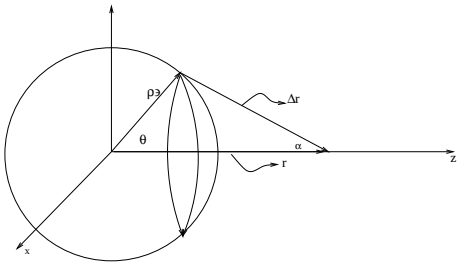

Figura 2.2: Distribuição esférica de cargas.

Note que $\Delta r^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$. Caso I) $z > R$. Vamos considerar a contribuição de um anel de ângulo entre θ e $\theta + d\theta$. Como a distância é a mesma, todos os pontos do anel contribuem igualmente na direção z. Devemos levar em consideração o fator de projeção dado pelo cosseno do ângulo α. Esse é o ângulo entre o eixo z e qualquer segmento de reta que ligue o ponto de observação $(x, y, z) = (0, 0, z)$ a um ponto do anel. Ao variar o ângulo θ a carga total do anel será

$$dq = \sigma 2\pi R\sin\theta R d\theta. \tag{1.20}$$

Assim

$$dE_z = \cos\alpha 2\pi\sigma R^2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\alpha d\theta}{z^2+R^2-2zR\cos\theta}. \tag{1.21}$$

Usando que

$$\cos\alpha = \frac{z - R\cos\theta}{\Delta r} \tag{1.22}$$

podemos calcular a integral definindo como variável de integração $z' = \cos\theta$. *De fato, resulta*

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon}\int_{-1}^{1}\frac{z - Rz'}{(z^2+R^2-2zRz')^{3/2}}dz' \\ &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon}\left[\frac{z - Rz'}{zR(z^2+R^2-2zRz')^{1/2}}\right]_{-1}^{1} - \frac{\sigma R^2}{2\epsilon}\frac{-R}{zR}\int_{-1}^{1}\frac{z'}{(z^2+R^2-2zRz')^{1/2}}dz' \\ &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Caso $z < R$: *O cálculo é exatamente o mesmo até à equação (1.23). A partir daí é preciso levar em consideração que as raízes do denominador são agora* $R - z$ *e* $R + z$ *resultando em*

$$\vec{E} = \vec{0}. \tag{1.24}$$

O resultado do último exercício é particularmente importante. Ele mostra que fora da casca esférica o campo é o mesmo que seria se a carga estivesse no centro e dentro da casca esférica é nulo.

Exercício: Encontre o campo vetorial elétrico de um anel na forma de triângulo equilátero uniformemente carregado a uma distância z acima do centro.

Exercício: Encontre o campo elétrico de uma distribuição esférica qualquer. Isto é suponha que $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. *Você pode utilizar o resultado da casca esférica para simplificar sobremaneira o cálculo. Mostre que o campo tem a forma*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}\,q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{1.25}$$

2.2 Potencial eletrostático

Já vimos que o teorema de Helmholtz permite expressar o campo elétrico como o gradiente de um campo escalar. Isto decorre particularmente da anulação do rotacional do campo elétrico nas situações de eletrostática. De fato o teorema de Stokes leva a que a integral de linha de $\vec{E}$ seja nula num percurso fechado e portanto a que a integral entre pontos extremos fixos seja independente do caminho:

$$\int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2}\vec{E}.d\vec{l} = -\phi(\vec{r}_2) + \phi(\vec{r}_1). \tag{2.26}$$

A formulação do da eletrostática em termos do campo escalar apresenta grandes vantagens. De fato a expressão do campo escalar em termos das fontes

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r} d^3r' \tag{2.27}$$

em geral é de mais fácil integração do que a expressão do campo elétrico em termos da densidade de cargas. O campo $\vec{E}$ apresenta três componentes e portanto três são as integrais a serem feitas. O campo escalar somente tem uma componente. Tendo obtido o campo escalar o campo elétrico será obtido por uma simples derivação :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \tag{2.28}$$

A unidade de medida do campo ϕ no sistema SI é o Volt, ou Newton X Metro /Coulomb, já que a unidade do campo elétrico é dada por Newton / Coulomb.

O campo escalar pode ser obtido do elétrico por integração de linha direta, nos casos em que se conheça este último. Embora não seja este o caminho mais prático para obter o campo escalar vamos por razões didáticas discutir este processo. Por exemplo o campo elétrico de uma distribuição esférica é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}, \tag{2.29}$$

com $q(r)$ o total de cargas interno ao raio r, no sistema de referência com origem no centro de simetria da distribuição de cargas. Para este caso teremos:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q(r')}{\epsilon_0}\frac{\hat{r}'}{r'^2}.(r\,d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi} + dr\hat{r}) & (2.30)\\ &= -\int_{r_0}^{r} E(r)dr. & (2.31) \end{aligned}$$

A escolha de r_0 dita o(s) ponto(s) do espaço em que $\phi(\vec{r})$ será nulo. Em particular se fazemos $r_0 = \infty$ o campo escalar será nulo no infinito. Esta é a *escolha* mais frequente e que permite a interpretação em termos de energia mais direta. Particularizando, vamos discutir o caso de uma casca esférica de raio R. Neste caso $q(r) = Q$ para $r > R$ e $q(r) = 0$ para $r < R$. O potencial será dado por

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}) \tag{2.32}$$

para $r > R$ e, para $r < R$, por

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}). \tag{2.33}$$

Observe que sobre toda a região $r < R$ o potencial é constante já que o campo é nulo.

Exercício: Encontre os potenciais elétricos produzidos por uma esfera homogênea de cargas e por uma casca esférica homogênea de raio interno r_1 e externo r_2, a partir do campo vetorial elétrico.

Exercício) Calcule o potencial para uma distribuição cilíndrica de cargas a partir do resultado:

$$\vec{E} = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_o r}\hat{r} \tag{2.34}$$

com

$$\lambda(r) = 2\pi \int_0^r r'^2 \rho(r')dr'. \tag{2.35}$$

Particularize para o caso de um cilindro homogêneo, casca cilíndrica e fio de cargas de dimensão transversal desprezível.

Exercício: Mostre que qualquer campo vetorial radial pode ser escrito como o gradiente de um escalar.

A discussão acima, em que encontramos ϕ a partir de $\vec{E}$, não parece tratar da situação mais importante. Em geral, exceto quando a simetria é muito forte, é mais fácil calcular primeiro o potencial escalar e depois calcular o campo elétrico por derivação (aplicando o gradiente). A maneira mais direta de calcular o campo escalar é , como vimos, a partir do teorema de Helmholtz, através da equação :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r} d^3r'. \tag{2.36}$$

Como exemplo, calcularemos o potencial de uma casca esférica de raio R. Calculando campo em um ponto no eixo z e escolhendo a origem no centro da esfera (figura 2.2) teremos:

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma}{\Delta r} da & (2.37)\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int R^2 \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}} & (2.38)\\
&= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_o}\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}} & (2.39)\\
&= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_o}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzx}} & (2.40)
\end{aligned}$$

Obtemos assim que fora da esfera $\phi(r) = R^2\sigma/\epsilon_o r$ enquanto no seu interior $\phi(r) = R^2\sigma/\epsilon_o R$.

Exercício: Encontre o potencial para cada uma as seguintes situações:

a) Duas cargas iguais e o campo calculado na mediatriz do segmento que as une.

b) Duas cargas opostas e o campo calculado na mediatriz do segmento que as une.

c) Segmento de reta uniformemente carregado ao longo de uma reta ortogonal a ele passando pela sua extremidade.

d) Disco uniforme de cargas ao longo do eixo de simetria.

Para cada caso explique que informações você dispõe sobre o campo elétrico a partir do conhecimento especificado do potencial elétrico.

2.3 Lei de Gauss

Nós partimos da Lei de Gauss e da condição de campo irrotacional para determinar o campo elétrico como dado pela lei de Coulomb 1.5. O argumento pode ser invertido. A partir da lei

de Coulomb podemos obter a lei de Gauss. De fato já indicamos como fazê-lo na seção anterior. Vamos esboçar outro caminho para obter a lei de Gauss diferencial a partir da lei de Coulomb para cargas pontuais (1.7).

1)Para uma carga pontual colocada na origem o campo é radial e decai com $1/r^2$. Escolhendo uma superfície esférica com centro na origem e raio R para calcular a integral de superfície do campo elétrico obtemos imediatamente que

$$\oint \vec{E}.d\vec{a} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}r^2 d\omega = \frac{q}{\epsilon}. \tag{3.41}$$

2) Mudando a superfície original para uma superfície arbitrária realizamos a integral tomando áreas infinitesimais subentendidas pelo cone com centro na origem com ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$. Sendo o campo radial e caindo com $1/r^2$, o mesmo fator de crescimento da área, a contribuição pode ser substituída por aquela que haveria na superfície de uma esfera de raio r subentendida pelo mesmo ângulo sólido infinitesimal:

$$\vec{E}.d\vec{a} = Ed\vec{a}.\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}r^2 d\omega. \tag{3.42}$$

Integrando sobre toda a superfície, desde que a origem seja interior a esta, obtemos o mesmo resultado para a integral de linha que no caso anterior. Se a origem for exterior, a integral de superfície se divide em duas: uma em que a superfície está orientada para o centro, que dá uma contribuição negativa, e outra em que a superfície está orientada para fora, resultando o mesmo valor em módulo, mas positivo. A integral é nula.

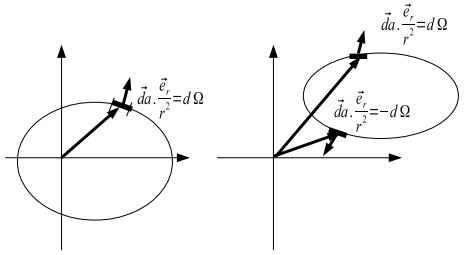

Figura 2.3: Carga interna e externa.

3)Considerando agora uma configuração de várias cargas pontuais, a integral de superfície será coincidente com a contribuição de todas as cargas internas à superfície:

$$\oint_{\delta V} \vec{E}.d\vec{a} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}, \tag{3.43}$$

onde $Q(V)$ é a carga contida no volume V cuja borda define a superfície gaussiana. Esta é a lei de Gauss na forma integral.

4) Aplicando agora o teorema da divergência no lado esquerdo obtemos

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}d^3r = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})d^3r. \tag{3.44}$$

Resulta ainda, já que o volume de integração é arbitrário, que

$$\vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}), \tag{3.45}$$

que é a lei de Gauss na forma diferencial.

Podemos agora fazer um resumo sobre eletrostática na forma de um gráfico:

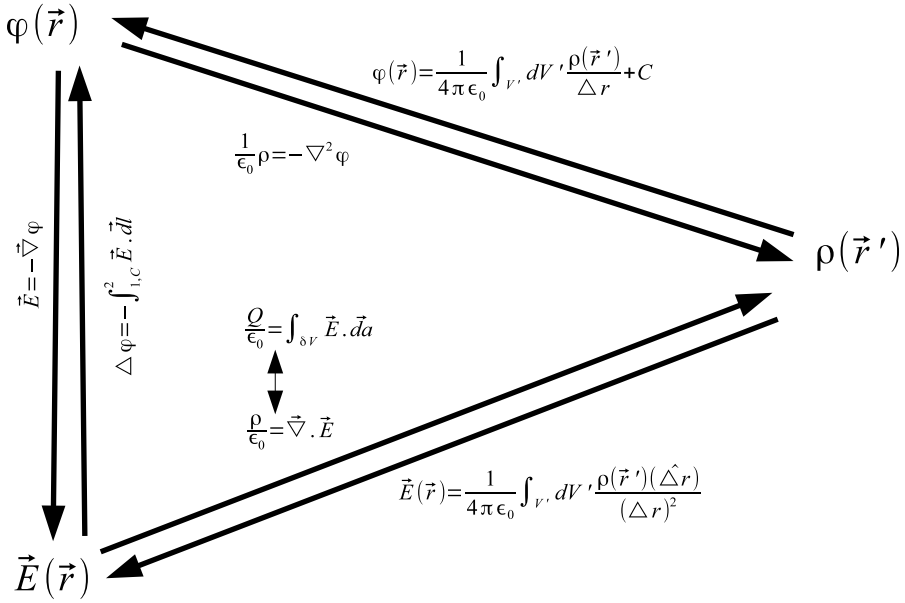

Figura 2.4: Quadro resumo Eletrostática.

2.3.1 Aplicações da lei de Gauss

Usando a lei de Gauss se pode realizar diretamente o cálculo do campo elétrico, de maneira extremamente simples, em situações em que haja suficiente simetria no problema físico. Veremos alguns exemplos a seguir.

O campo de uma distribuição de cargas com simetria esférica, $\rho(r)$, somente pode depender da variável radial r. Também devido à simetria o campo não deve ter componentes em direção outra que não a radial. Para calcular o valor da componente não nula $E_r(r)$ devemos calcular a integral de superfície do campo em uma superfície Gaussiana que explore a simetria do problema, uma superfície esférica de raio arbitrário, R:

$$\oint \vec{E}.d\vec{a} = E_r(R)4\pi R^2 = \frac{q(R)}{\epsilon} \tag{3.46}$$

onde $q(R)$ é a carga contida no interior da esfera. O campo elétrico será assim

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}\ q(r)}{r^2} \tag{3.47}$$

Exercício: Usando uma superfície Gaussiana cilíndrica mostre que o campo de um cilindro infinito cuja densidade de cargas depende somente da coordenada polar cilíndrica r é dado por

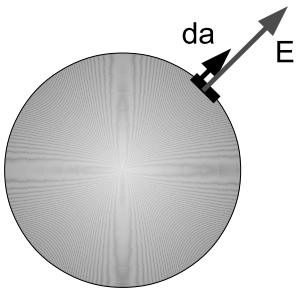

Figura 2.5: Gaussiana esférica.

$$\vec{E} = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}, \tag{3.48}$$

com

$$\lambda(r) = 2\pi \int_0^r \rho(r')r'dr'. \tag{3.49}$$

Também muito importante é o cálculo do campo elétrico de um plano uniforme de cargas, cuja densidade superficial de cargas é σ. Neste caso a superfície Gaussiana adequada é um paralelepípedo com duas faces paralelas ao plano de cargas dispostas a iguais distâncias deste.

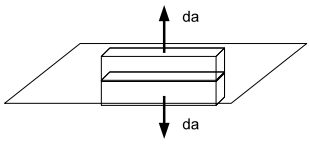

Figura 2.6: Gaussiana em paralelepípedo.

A simetria do problema nos mostra que somente a componente vertical deve ser diferente de zero. Além disto o campo na face superior deve ser igual em módulo e oposto ao da face inferior. Assim obtemos pela lei de Gauss que

$$\oint \vec{E}.d\vec{a} = A(E_+ - E_-) = 2AE_+ = 2A\sigma, \tag{3.50}$$

e portanto

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}, \tag{3.51}$$

com $\hat{n}$ o vetor unitário normal ao plano na direção do ponto de observação . Preste atenção ao fato de que o campo de uma carga pontual apresenta uma singularidade do tipo $1/r^2$ em $r = 0$ enquanto um fio de carga infinito com densidade constante, o análogo a uma carga pontual num espaço de duas dimensões, produz uma singularidade do tipo $1/\tilde{r}$. Um plano de cargas infinito é

o análogo de uma partícula pontual em um espaço de uma dimensão . Neste caso a singularidade se encontra na derivada do campo, e não no campo em si. O campo sofre uma descontinuidade de σ/ϵ_0 ao atravessar o plano.

Exercício resolvido: Como uma elaboração deste problema imagine dois planos paralelos carregados uniformemente com densidades σ_1 e σ_2. Chamemos de região I aquela acima do primeiro plano, de região II a intermediária aos dois planos e de região III a inferior ao segundo plano. Podemos calcular os campos em cada região , pelo princípio da superposição, como contribuições de cada plano separadamente. Obteremos então que o campo será ortogonal aos planos com componente, no sentido do segundo para o primeiro plano, dadas por:

$$E_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_o} \tag{3.52}$$

$$E_{II} = \frac{-\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_o} \tag{3.53}$$

$$E_{III} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_o}. \tag{3.54}$$

Observe que nas regiões I e III o campo é o mesmo que seria obtido se os planos de carga estivessem superpostos. Caso $\sigma_1 = \sigma_2$ o campo será nulo no interior. Caso $\sigma_1 = -\sigma_2$ o campo será confinado à região entre as cargas e dado por $E_{II} = \sigma_2/\epsilon_0$.

Exercício: Calcule o campo de uma distribuição de cargas volumétrica que seja função somente do módulo da coordenada cartesiana $|z|$. Sugestão : imagine esta distribuição de cargas composta pela superposição de infinitos planos de carga dispostos simetricamente em torno de $z = 0$.

Este fenômeno da descontinuidade do campo elétrico ao atravessar um plano de cargas tem uma importância bem maior do que se pode imaginar à primeira vista. Ele é de fundamental importância no estabelecimento das condições de contorno a que o potencial elétrico esta sujeito ao atravessar uma camada de cargas. De fato o potencial está determinado pela lei de gauss na forma diferencial (1.1). Substituindo o campo elétrico pela sua expressão em termos do potencial naquela lei obtemos a equação e Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{-\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \tag{3.55}$$

que no caso de densidade nula se reduz à equação de Laplace. Como equações diferenciais parciais as equações de Poisson ou Laplace devem ser suplementadas com informações sobre o campo escalar para terem uma solução única. Lidaremos seguidamente com condições estabelecidas sobre o valor do campo escalar elétrico em uma superfície ou sobre os de suas derivadas na superfície. Este último tipo de condição de contorno pode ser já compreendida do ponto de vista físico. Suponha que ao longo de uma superfície S haja uma densidade de cargas superficial σ que pode depender da posição . Vamos orientar esta superfície definindo um vetor unitário normal a ela, $\vec{n}$. Queremos calcular o campo em pontos próximos nos dois lados da superfície. Para um ponto suficientemente próximo da superfície imagine um segmento de reta que o ligue a um ponto base na superfície de maneira ortogonal. Considere agora uma porção da superfície definida por pontos com distância menor que o comprimento do segmento multiplicado por uma constante arbitrária muito maior que o número um. A idéia é que se o comprimento do segmento for suficientemente pequeno esta constante pode ser muito grande a ainda assim a porção da superfície ser muito pequena,

podendo ser aproximada com um plano. Então calculamos o campo elétrico criado pelas carga nessa porção do mesmo modo que de um plano infinito aplicando o teorema de Gauss usando uma caixa retangular centrada na superfície. Resulta que a contribuição dessa parte próxima da superfície apresenta uma descontinuidade:

$$(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}).\vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{3.56}$$

onde $\vec{E}^{+}$ está na região para onde o vetor $\vec{n}$ aponta e $\vec{E}_{-}$ na região oposta. Ao mesmo tempo, aplicando o teorema de Stokes para o cálculo da integral de linha de $\vec{E}$ em um circuito retangular comprido paralelo à superfície com uma aresta num lado do plano e o outro do outro lado, obtemos a condição de continuidade da componente tangencial do campo elétrico

$$(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}) \times \vec{n} = 0. \tag{3.57}$$

No que diz respeito ao campo escalar, teremos a descontinuidade da sua derivada normal:

$$(\vec{\nabla}\phi^{+} - \vec{\nabla}\phi^{-}).\vec{n} = \frac{\partial(\phi^{+} - \phi^{-})}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{3.58}$$

Além disto, o campo escalar deve ser contínuo ao atravessar a superfície. Isto se deve fato de o rotacional do campo elétrico ser nulo em todo espaço inclusive na superfície, como expressa a equação (3.57).

2.4 Trabalho e Energia

Já foi visto no curso de física básica que o produto do campo escalar elétrico pela carga se interpreta como a energia da partícula. Vamos aqui esclarecer melhor este conceito. Se transportamos uma carga Q ao longo de um trajeto onde haja um campo elétrico devido a outras cargas que não tenham suas posições modificadas à medida que realizamos o trajeto, o trabalho realizado contra a força elétrica será

$$W = -Q\int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = Q\int_a^b \vec{\nabla}\phi.d\vec{l} = Q(\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)). \tag{4.59}$$

Vemos assim que tratamos com um sistema conservativo, já que o trabalho depende somente dos pontos extremos, e que a energia potencial- da partícula- é dada por

$$U_{\text{partícula}} = Q\phi(\vec{r}).$$

Uma questão distinta é encontrar a energia empregada para construir a configuração de cargas- energia de configuração. Imagine uma configuração de partículas de cargas q_i localizadas nos pontos $\vec{r}_i$. Vamos trazer estas partículas de situações em que elas estão infinitamente afastadas atá as posições finais. O potencial elétrico nesta situação será a superposição dos potenciais elétricos criados por cada carga q_i,

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i \phi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}|\vec{r} - \vec{r}_i|^{-1}. \tag{4.60}$$

Vamos calcular a energia recursivamente. Trazer a primeira partícula não gasta energia, já que não há outras carga presentes. Trazer a segunda partícula requer uma energia

$$U_{\text{partícula 2}} = q_2\phi_1(\vec{r}_2), \tag{4.61}$$

já que esta será movimentada na presença do campo da primeira. Trazer a terceira partícula adicionará a energia

$$U_{\text{partícula 3}} = q_3(\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3)). \tag{4.62}$$

Trazer a i-ésima partícula requer uma energia

$$U_{\text{partícula i}} = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \phi_j(\vec{r}_i) \quad \text{(sem soma em i!)} \tag{4.63}$$

Somando a energia total empregada teremos:

$$U_{\text{configuração}} = \sum_i U_{\text{partícula i}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} q_i\phi_j(\vec{r}_i) \tag{4.64}$$

Esta expressão pode ser simetrizada. De fato

$$\begin{aligned} U_{\text{configuração}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{\Delta r_{ij}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{\Delta r_{ij}} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i<j}\frac{q_jq_i}{\Delta r_{ji}}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i,j(i\neq j)}^{N}\frac{q_iq_j}{\Delta r_{ij}}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\tag{4.66}$$

Facilmente se chega também à expressão

$$U_{\text{configuração}} = \frac{1}{2}\sum_i^N q_i\phi'(\vec{r}_i) \tag{4.67}$$

onde $\phi'(\vec{r}_i)$ é o campo escalar na posição da partícula i criado pelas demais partículas. Observe o fator $1/2$ quando comparado com a energia de uma partícula num campo fixo. A exclusão do campo criado por uma partícula sobre ela mesma é necessária apenas quando lidamos com cargas pontuais. Nos casos de configuração linear, superficial ou volumétrica ficaremos simplesmente com as expressões

$$U_{\text{config-1D}} = \frac{1}{2}\int_C \lambda(l)\phi(l)dl, \tag{4.68}$$

$$U_{\text{config-2D}} = \frac{1}{2}\int_S \sigma(a)\phi(a)da, \tag{4.69}$$

$$U_{\text{config-3D}} = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})d^3r, \tag{4.70}$$

e expressões análogas à da equação (4.65). Mais importante fisicamente é a expressão da energia de uma configuração de cargas diretamente em termos de energia associada aos campos. Acompanhe a manipulação a seguir

$$
\begin{aligned}
U_{\text{configuração}} &= \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d^3r = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\phi d^3r \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \left[\vec{\nabla}.(\vec{E}\phi) - \vec{E}.\vec{\nabla}\phi\right] d^3r \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_{S=\delta V} \vec{E}\phi.d\vec{a} + \int_V (\vec{E})^2 d^3r\right]. \qquad (4.71)
\end{aligned}
$$

O segundo termo acima é o mais importante. Ele pode ser interpretado como a integral no volume da densidade de energia $u = \epsilon_0|\vec{E}|^2/2$. O primeiro termo tem uma interpretação mais sutil. Lembrando da descontinuidade do campo elétrico ao atravessar uma densidade superficial de cargas podemos concluir que uma densidade superficial de cargas dada por

$$\sigma = \epsilon_0|\vec{E}|^2 \qquad (4.72)$$

seria a necessária para, mantendo o campo dado no interior da região V, anulá-lo do lado de fora da superfície. Este termo pode ser então interpretado como a contribuição para a energia desta densidade superficial de cargas. De todo modo, se tomamos o volume com sendo todo o espaço, este termo será desprezível desde que a configuração de cargas seja localizada o que levará, como veremos, a um decaimento suficientemente rápido do campo no infinito para compensar o crescimento da superfície. Neste caso então ficamos somente com o termo de volume

$$U_{\text{configuração}} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V (\vec{E})^2 d^3r. \qquad (4.73)$$

Exemplo: Energia de uma casca esférica com raio R e $\sigma = q/(4\pi R^2)$. O campo será dado por $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ para $r > R$ e nulo para $r < R$. O potencial será $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ para $r > R$ e $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ para $r < R$. Usando a equação (4.69) a integração é imediata levando a

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \qquad (4.74)$$

Por outro lado podemos realizar a integral da densidade de energia sobre todo o espaço

$$U = \int_{r>R} \frac{\epsilon_0 q^2}{32\pi^2\epsilon_0^2 r^2} r^2 d\,r\,d\,\Omega, \qquad (4.75)$$

levando ao mesmo resultado

Exercício: Calcule a energia de uma esfera homogênea de raio r carregada com uma carga total q. Compare com a energia armazenada numa casca esférica.

2.5 Condutores e capacitância

Um bom condutor apresenta cargas livres, elétrons ou buracos, que reagem rapidamente à presença de um campo elétrico em seu interior. Como resultado, estas cargas tendem a se acumular nos extremos do condutor, com as cargas positivas ficando nos extremos com baixo potencial e vice-versa. Este acúmulo de cargas cria uma campo elétrico que é oposto ao campo aplicado. Daí

então, o campo no interior do condutor se anula e ao mesmo tempo o potencial fica constante ao longo de todo o condutor. Como não há campo no interior do condutor em equilíbrio, não pode haver cargas livres também. De fato toda a carga livre no condutor corre para a superfície. Na superfície do condutor o campo é ortogonal á superfície já que o potencial é constante no interior do condutor, e assim deve permanecer na sua superfície. Os exemplos seguintes ilustram a capacidade de blindagem de um condutor.

Exemplo: Qual é o campo em todo o espaço devido a uma carga pontual q no centro de uma camada esférica condutora de raio interno r_i e externo r_e? Devido à simetria esférica podemos considerar superfícies Gaussianas esféricas com raios $r_1 < r_i$, $r_2 < r_e$ e $> r_i$ e $r_3 > r_e$. No primeiro caso concluímos que o campo é $\frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. No segundo caso sabemos que o campo é nulo consequentemente pelo teorema de Gauss haverá uma carga total $-q$ distribuída uniformemente na superfície de raio r_i. No terceiro caso usando que a carga distribuída no raio r_e é de módulo igual e contrária à distribuída em r_i obtemos um resultado igual ao do primeiro caso.

Exemplo: Repetimos o anterior com a superfície interna não mais esférica e a externa, esférica, mas não concêntrica com a carga. Neste caso o campo no interior do condutor continua nulo o que requer uma carga superficial interna total $-q$ e portanto a carga superficial externa será de q. As densidades interna e externa têm características marcadamente distintas. Devido ao campo nulo no interior a densidade superficial externa será uniforme, afinal no caso anterior esta densidade estava em equilíbrio. A densidade superficial interna varia com a posição.

Exercício: Encontre o campo e as densidades superficiais devido a duas cargas q_1 e q_2 colocadas nos centros de dois buracos esféricos feitos em um condutor esférico. Se a superfície externa é conectada à Terra o que acontece?

Como vimos, uma densidade superficial de cargas apresenta uma descontinuidade na componente normal do campo elétrico ao atravessá-la. No caso de um condutor, como o campo no interior é nulo, chamando de $\hat{n}$ o vetor normal á superfície do condutor apontando do seu interior para fora e de $\vec{E}$ o campo elétrico fora e próximo do condutor, resultante de alguma configuração de cargas e da própria distribuição superficial, a densidade superficial do condutor será dada por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \tag{5.76}$$

ou

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{5.77}$$

A força exercida sobre o condutor devido á sua densidade superficial de cargas, dada por $\sigma\vec{E}da$, requer um esclarecimento. Tal qual no caso de planos de cargas infinito é preciso eliminar o campo criado pela própria superfície, ou melhor o campo criado pela porção da superfície infinitesimal onde calculamos a força. Como porção infinitesimal podemos calcular o campo por ela criado analogamente ao cálculo do campo de um plano infinito. Assim o campo criado pela própria porção infinitesimal na sua vizinhança será

$$\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}, \tag{5.78}$$

com o sinal ajustado para que ele aponte para fora da superfície se sigma for positivo. Ora a eliminação desta contribuição significa que o campo efetivo para cálculo da força será $\vec{E}/2$ tanto no interior como no exterior, não apresentando descontinuidade como era de se esperar. Em resumo

este campo é a média do campo total dentro ($\vec{E}=0$) e fora ($\vec{E}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$) do condutor próximo à superfície. Dividindo a força pela área vemos que haverá uma pressão eletrostática dada por

$$P=\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}=\frac{\epsilon_0(\vec{E})^2}{2} \tag{5.79}$$

Qual a força exercida entre o hemisfério superior e inferior de uma superfície homogênea de cargas de raio R?

O campo é radial e num ponto externo próximo da superfície é dado por $\vec{E}=\sigma\hat{r}/\epsilon_0$. *Dividindo por dois e integrando sobre hemisfério superior teremos:*

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{\theta>\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma^2\hat{r}.\hat{z}}{2\epsilon_0}da & (5.80)\\ &= \frac{R^2\sigma^2\pi}{\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta & (5.81)\\ &= \frac{R^2\sigma^2\pi}{2\epsilon_0} & (5.82)\end{aligned}$$

2.5.1 Capacitores

Se consideramos dois condutores com cargas Q no condutor C_1 e $-Q$ no condutor C_2 estas cargas se distribuirão nas superfícies dos condutores criando um campo elétrico que será ortogonal ás superfícies. Como os condutores têm potencial uniforme faz sentido definir a diferença de potencial entre eles, $\Delta\phi=\phi(C_1)-\phi(C_2)$. Ora se multiplicamos o campo em todo o espaço por um fator de escala e as cargas nos condutores pelo mesmo fator continuaremos com os campos ortogonais à superfície dos condutores e satisfazendo à condição de contorno de descontinuidade do campo elétrico (este argumento pressupõe que os condutores estejam suficientemente afastados de outras cargas). A relação entre carga Q e diferença de potencial $\Delta\phi$ é uma constante chamada capacitância e depende somente da geometria dos condutores, se no vácuo. Esta configuração de cargas em condutores se chama de capacitor.

A energia armazenada em um capacitor é obtida diretamente da expressão (4.67):

$$W=\frac{Q\Delta\phi}{2}=\frac{C\Delta\phi^2}{2}=\frac{Q^2}{2C}. \tag{5.83}$$

Exemplo: Calcule a capacitância de duas placas planas paralelas.

O campo entre elas é dado por $\vec{E}=\sigma/\epsilon_0\hat{n}$. *A diferença de potencial será* $\Delta\phi=d\sigma/\epsilon_0$ *ou* $=dQ/A\epsilon_0$, *onde* $Q=A\sigma$ *é a área total da placa e* Q *sua carga. Supomos aqui um distribuição uniforme nas placas o que somente se justifica se na hipótese de* $d<<\sqrt{A}$ *permitir desprezar as deformações dos campo e densidade de carga próximo à bordas. Neste caso a capacitância será*

$$C=\frac{A\epsilon_0}{d} \tag{5.84}$$

Exemplo: Calcule a capacitância de duas esferas concêntricas de raios R_1 *e* R_2.

O campo agora será radial de módulo $Q\,r^2/R_1^2\epsilon_0$. A sua integral entre R_1 e R_2 leva a

$$\Delta\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

e a capacitância será

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{5.85}$$

Observe que nestes exemplos a capacitância é função da geometria somente.

Exercício: Calcule a capacitância por unidade de comprimento de dois tubo condutores coaxiais de raios $\tilde{r}_i$ e $\tilde{r}_e$.

Exercício: Uma placa condutora é aproximada e outra paralela de um valor infinitesimal Δx. Qual é o trabalho realizado? Qual a variação da energia acumulada no campo elétrico?

2.6 Propriedades das soluções da equação de Laplace

Já vimos que a equação diferencial de Gauss quando expressa em termos do campo escalar toma a forma da equação de Poisson

$$\Delta^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.86}$$

que no caso $\rho = 0$ se reduz à a equação de Laplace.

Podemos inicialmente estudar as soluções da equação de Laplace em uma dimensão quando $\phi = \phi(x)$. A equação se torna

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 0, \tag{6.87}$$

cuja solução geral é $\phi = ax + b$. Além da condição inicial quando ϕ e $\frac{d}{dx}\phi$ é conhecido em algum ponto do espaço a solução está a univocamente determinada se forem dados os valores do campo nos extremos de um intervalo, $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$. Além disto o valor do campo em um ponto coincide com o seu valor em pontos simetricamente colocados, $2\phi(x) = \phi(x + x_0) + \phi(x - x_0)$. Como consequência vemos que o campo ϕ não apresenta nem máximos nem mínimos no interior de um segmento de reta. Estas propriedades são generalizadas para dimensões maiores. Em duas dimensões o campo estará univocamente determinado se forem dados os valores do campo em uma borda de uma região fechada. O valor do campo em um ponto coincide com o seu valor médio em qualquer círculo concêntrico com este ponto e consequentemente não haverá máximos nem mínimos. Em três dimensões também o valor do campo coincide com o seu valor médio em qualquer superfície esférica concêntrica ao ponto e consequentemente não haverá máximos ou mínimos. A propriedade de não haver máximos ou mínimos locais decorre de que a existência de extremos requer que as derivadas parciais segundas nas direções dos eixos x e y devem ter mesmos sinais, o que é incompatível com a equação de Laplace que requer a nulidade das suas somas.

Vamos demonstrar agora que o valor médio do campo numa esfera coincide com o seu valor no centro. Considere o campo criado por uma carga pontual em $\vec{r}_0 = r_0\hat{z}$ e a esfera com centro na origem e raio $R < r_0$. O campo médio na superfície da esfera será

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S da\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi R^2}\oint_S da\frac{q}{|\vec{r}-r_0\hat{z}|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi R^2}\oint_S da\frac{q}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\theta)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi R^2}\oint_\Omega R^2\sin\theta d\theta d\varphi\frac{q}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\theta)^{1/2}} \\
&= \frac{q}{8\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1} dx\frac{1}{(R^2+r_0^2-2Rr_0x)^{1/2}} \\
&= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 Rr_0}[(R+r_0)-(R-r)] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \qquad (6.88)
\end{aligned}
$$

que é o valor do campo criado pela carga na origem, centro da esfera. Se demonstramos para uma única carga para um conjunto de cargas pontuais a generalização do resultado é imediata já que a média da superposição dos campo será o soma dos valores médios dos campos criados por cada carga.

Exercício: Repita o cálculo anterior com a carga no interior, $R > r_0$, e mostre que o campo médio coincide com o campo que seria produzido se a carga estivesse no centro da esfera.

Exercício: Discuta o teorema de Earnshaw que afirma não existir uma configuração de cargas fixas que estejam em equilíbrio somente por ação de forças eletrostáticas.

A seguir vamos responder à pergunta sobre quais são as condições de contorno que devem ser impostas a uma solução da equação de Laplace, ou Poisson, para que a sua solução seja única.

Teorema 1: A solução da equação de Laplace, $\phi(\vec{r})$, está univocamente determinado em uma região V se soubermos os valores do campo sobre a borda de V, δV.

Demonstração : Se a condição de contorno for $\phi = 0$ em todos os pontos de δV o campo será necessariamente nulo no interior de V já que ele não pode apresentar máximos ou mínimos. Caso houvesse algum ponto com o campo ϕ positivo, por exemplo, poderíamos perguntar qual o valor máximo do campo e ele estaria certamente no interior da região o que não é permitido como vimos atrás. Caso a condição de contorno seja mais complexa, com valores não uniformes na superfície, vamos supor que haja duas soluções distintas para a mesma condição de contorno. Tome agora a diferença entre estas soluções. Esta diferença satisfaz também à equação de Laplace e a condição de contorno nesta solução é de que ela seja nula na superfície. Ora como vimos acima isto significa que a diferença entre os campos núla. Ou seja a solução é única.

Este resultado pode ser generalizado para soluções da equação de Poisson. Suponhamos que dois campos, ϕ_1e ϕ_2 satisfaçam à equação de Poisson, $\nabla^2\phi = \rho$, com a mesma fonte, ρ, para os dois campos. a diferença entre estes campos satisfaz à equação de Laplace. Se ambos os campos satisfizerem à mesma condição de contorno, qual seja, a de terem valores na borda da região conhecidos, então vale o mesmo argumento acima e a diferença entre os campo é nula.

Teorema 2: O campo escalar, solução da equação de Poisson para uma fonte conhecida $\rho(\vec{r})$, está univocamente determinado, a menos de uma constante global, numa região V cuja borda é composta por uma coletânea de superfícies fechadas $\delta_i V$ se:

1)O campo escalar for constante em cada superfície, embora não saibamos os valores de cada constante, e

2)A derivada normal $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ tem sua integral de superfície em cada superfície, $\delta_i V$, conhecida.

Demonstração :

O valor da integral de superfície da derivada normal determina a carga total no interior da superfície $\delta_i V$:

$$\oint_{\delta_i V} \frac{\partial\phi}{\partial n} da = \oint_{\delta_i V} \vec{E}.d\vec{a} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}. \tag{6.89}$$

Além disto sabemos que o campo elétrico é ortogonal à superfície, já que ϕ é constante. Suponhamos então dois campos elétricos, $\vec{E_1}$ e $\vec{E_2}$, soluções cujos potenciais, ϕ_1 e ϕ_2, satisfazem às condições prescritas. A diferença, $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, satisfaz à equação de Laplace, e a integral de superfície de sua derivada normal é nula. Vamos calcular então a integral da divergência do produto do campo escalar pelo elétrico:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}.(\Delta\phi\Delta\vec{E}).d^3r &= \int_V \left[\left(\vec{\nabla}\Delta\phi\right).\Delta\vec{E} + \Delta\phi\vec{\nabla}.\Delta\vec{E}\right] d^3r \\ &= -\int_V (\Delta\vec{E})^2 d^3r, \end{aligned} \tag{6.90}$$

usando que $\vec{\nabla}.\Delta\vec{E} = 0$. O lado esquerdo, calculado pelo teorema da divergência leva a

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}.(\Delta\phi\Delta\vec{E}).d^3r &= \sum_i \oint_{\delta_i V} \Delta\phi\Delta\vec{E}.d\vec{a} \\ &= \sum_i \Delta\phi_i \oint_{\delta_i V} \Delta\vec{E}.d\vec{a} = 0, \end{aligned} \tag{6.91}$$

já que $\int \Delta\vec{E}.d\vec{a}$ se anula pela condição de contorno 2 acima. Conclui-se assim novamente que $\Delta\vec{E}$ deve ser nulo e portanto o campo elétrico é unívoco.

Teorema 3: O campo ϕ está univocamente determinado em uma região, a menos de uma constante global, se conhecemos ou o valor do campo ou de sua derivada normal na(s) superfície(s) borda da região .

A demonstração é parecida com a do teorema acima. A equação (6.90) se repete novamente. A aplicação do teorema da divergência leva agora

$$\int_V \vec{\nabla}.(\Delta\phi\Delta\vec{E}).d^3r = \oint_{\delta V} \Delta\phi\Delta\vec{E}.d\vec{a} = 0, \tag{6.92}$$

já que ou $\Delta\phi$ ou $\Delta\vec{E}$ se anula pelas condições de contorno. Assim novamente a $\Delta\vec{E}$ deve se anular implicando na unicidade do campo.

Exercício: Considere que o potencial assuma os valores (constantes) ϕ_A e ϕ_B sobre cascas esféricas de raios R_A e R_B. Imagine uma configuração de cargas exteriores à região $R_A < r < R_B$ que dê origem a um campo escalar na região com os valores limites dados. Essa configuração é unívoca?

2.7 Método das imagens

Os teoremas de unicidade descritos acima nos auxiliam a discernir que tipo de problemas físicos têm sentido. Uma utilidade deles está em permitir uma espécie de solução de um problema físico

a partir da observação da solução de outro problema aparentado ao primeiro de tal forma que em uma região limitada do espaço as soluções dos dois problemas sejam idênticas. Este é o princípio do método das imagens. É mais fácil descrever com exemplos padrões.

Imagine o problema de encontrar o campo criado por duas cargas opostas colocadas digamos nos pontos $\vec{r}_1 = a\hat{z}$ e $\vec{r}_2 = -a\hat{z}$. Este problema já foi resolvido, já que se trata de somar as duas contribuições tipo campo de Coulomb. O potencial será

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + (z+a)^2}}\right), \tag{7.93}$$

com $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe as propriedades: Em $z = 0$ o potencial é constante, $\phi = 0$, e portanto o campo elétrico é ortogonal a esta superfície. No infinito o campo decai a zero.

Agora pense sobre outro problema bem distinto: Uma única partícula localizada no ponto $\vec{r}_1$ com a mesma carga q, sem a partícula localizada em $\vec{r}_2$, mas além da primeira partícula colocamos um plano condutor localizado no plano xy. Queremos saber qual o campo criado no semiplano superior, $z > 0$. Este problema estabelece condições de contorno parecidas com as discutidas no teorema 2 da seção anterior. Haverá cargas superficiais induzidas no plano condutor para que o campo total seja ortogonal ao plano. Se nos restringimos ao semi-espaço superior, $z > 0$, o campo obtido no problema anterior com duas cargas satisfaz à mesma equação diferencial, com uma fonte em $\vec{r}_1$, e às condições de contorno estabelecidas. Conclusão , já sabemos qual a solução deste problema. O campo elétrico obtido aplicando o gradiente será

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta r_1^3} - \frac{\Delta\vec{r_2}}{\Delta r_2^3}\right), \tag{7.94}$$

com $\Delta\vec{r_i} = \vec{r} - \vec{r_i}$. Em $z = 0$ somente a componente z sobrevive levando a

$$E_z = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\left(x^2 + y^2 + a^2\right). \tag{7.95}$$

O conhecimento do campo por outro lado permite obter qual a densidade de cargas induzidas na superfície. Observando a variação da componente normal ao atravessar a superfície condutora, lembrando que no interior do condutor o campo é nulo obtemos que a densidade superficial induzida será

$$\sigma = \frac{-qa}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}. \tag{7.96}$$

Evidentemente a integral de superfície será igual a $-q$ como devíamos esperar. A força que a partícula exerce sobre o plano e vice-versa é obtida simplesmente como a força que a carga real exerce sobre a virtual e vice-versa.

Exercício: Verifique que a carga total induzida na superfície é $-q$.

Voltando agora vamos esclarecer o essencial do método das imagens: O campo criado pela carga q em $\vec{r}_1$ juntamente com as cargas induzidas na superfície foi obtido, na região de interesse $z > 0$, acrescentando uma carga $-q$ na região $z < 0$, fora da região de interesse, chamada carga imagem. O campo criado pelas duas cargas coincide na região de interesse $z > 0$ com o campo criado pela carga q mais as cargas induzidas. Depois, de posse da solução, pudemos obter qual a carga induzida.

Uma outra situação padrão para aplicação do método das imagens é obtida substituindo o plano infinito por uma superfície esférica. Suponhamos por exemplo que queiramos saber qual o campo criado por um carga q_1 colocada no ponto $\vec{r}_1 = r_1\hat{z}$ na presença de uma esfera metálica aterrada centrada na origem e de raio $R < r_1$. Novamente não temos como aplicar a lei de Coulomb diretamente já que não sabemos qual a carga induzida.Vamos tentar obter esta solução pelo método das imagens. Como queremos o campo para $r > R$ devemos tentar colocar uma carga imagem no interior da esfera de modo a que o campo criado pela carga real e pela carga virtual esteja de acordo com a condição de contorno, $\phi = 0$ na superfície. Por simetria vamos colocar esta carga sobre o eixo z. Tomemos o seu valor como q' e sua posição como $\vec{r}' = r'\hat{z}$. O campo será dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}}\right) \tag{7.97}$$

Um pouco de álgebra mostra que se escolhemos $q' = -qR/r_1$ e $r' = R^2/r_1$ o campo se anulará sobre todos os pontos com $r = R$. O método das imagens também funciona neste caso. O campo elétrico pode ser obtido pelo gradiente da solução acima com os valores de q' e r' recém estabelecidos. Na superfície, o campo será radial com

$$E_r(\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(R^2 + {r_1}^2 - 2Rr_1\cos\theta)^{-3/2}\frac{R^2 - {r_1}^2}{R} \tag{7.98}$$

Obtemos a densidade de carga induzida na superfície como $\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(\theta)$. A força sobre a esfera será obtida pela força que a carga real exerce sobre a virtual e vice-versa.

Exercício: Verifique que a carga total induzida vale $-qR/r_1 e$.

Este problema, da carga na presença de uma esfera aterrada, permite uma generalização além da trivial de utilizar o princípio da superposição para tratar de um conjunto de cargas e não de uma única carga real. Trata-se de relaxar a condição de campo escalar nulo na superfície esférica para uma condição de campo com valor arbitrário. Basta acrescentar uma outra carga no centro da esfera para perceber que o campo criado pela carga real, pela carga imagem e pela carga na origem satisfaz à condição de ser constante na superfície. Ajustando o valor da carga na origem podemos escolher o potencial da esfera. Isto é equivalente também a ajustar a carga total induzida na esfera.

Exercício: Encontre a solução para uma carga na proximidade de uma esfera com esta tendo carga arbitrária Q. Qual a força que a partícula exerce sobre a esfera?

Exercício: Uma linha de cargas é disposta paralelamente ao um cilindro aterrado. Suponha por exemplo densidade linear λ na linha paralela ao eixo z que passa pelo ponto $y = 0$ e $x = d$ e o cilindro com eixo de simetria no eixo z e raio $D < d$. Discuta este problema pelo método das imagens, com base na solução de problema anterior em que localizamos as equipotenciais de duas densidades lineares opostas de cargas dispostas paralelamente e na qual vimos que estas equipotenciais são cilindros. Eventualmente considere também outra densidade linear virtual localizada no centro do cilindro. Explique claramente onde estão as carga imagens, qual a densidade superficial induzida e qual a força por unidade de comprimento exercida no cilindro.

2.8 Separação de Variáveis em coordenadas cartesianas

Vamos iniciar nossa discussão supondo que o potencial seja função apenas de duas variáveis, $\phi(x, y)$. Queremos encontrar soluções da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{8.99}$$

Um método muito útil consiste em tentar obter soluções na forma de produto de funções de cada variável separadamente, ou na forma de soma destes produtos. Tentemos pois soluções do tipo

$$\phi = \psi(x)\chi(y). \tag{8.100}$$

Substituindo na equação de Laplace e dividindo a equação resultante por ϕ teremos

$$\frac{1}{\psi}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dy^2}\chi(y) = 0. \tag{8.101}$$

Para que esta soma seja uma constante, zero, é preciso que cada parcela, que depende de apenas uma das variáveis também seja constante. Vamos chamar a primeira constante de k^2, supondo que ela seja positiva. Obtemos então em lugar da equação diferencial parcial, duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{1}{\psi}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = k^2, \tag{8.102}$$

e

$$\frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dy^2}\chi(y) = -k^2. \tag{8.103}$$

A solução destas equações diferenciais é bem conhecida:

$$\psi(x) = \tilde{A}e^{kx} + \tilde{B}e^{-kx} \tag{8.104}$$

e

$$\chi(y) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \tag{8.105}$$

onde $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. A solução da equação original, equação de Laplace bidimensional, resulta ser

$$\begin{aligned} \phi_k(x, y) &= (\tilde{A}e^{kx} + \tilde{B}e^{-kx})(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \\ &= \tilde{A}_1 e^{kx} \sin kx + \tilde{A}_2 e^{kx} \cos kx + \tilde{B}_1 e^{-kx} \sin kx + \tilde{B}_2 e^{-kx} \cos kx. \end{aligned} \tag{8.106}$$

Ora, esta é na verdade uma solução particular da equação bidimensional. Não seria muito útil encontrar esta solução não fosse por uma aspecto da equação de Laplace: seu caráter linear. Isto assegura que se realizamos superposições de soluções deste tipo continuamos lidando com soluções da equação de Laplace. Como a constante k é arbitrária a superposição de soluções com distintos valores de k fornece um método bastante geral para obter soluções da equação de Laplace. É comum

estarmos interessados em encontrar soluções estabelecidas por condições de contorno especificadas arbitrariamente. Se estas condições de contorno forem dadas de acordo com uma geometria que seja afim às coordenadas cartesianas poderemos com certeza encontrar a solução procurada na forma de uma soma de soluções do tipo acima descrito.

É melhor caminhar agora com um exemplo físico.

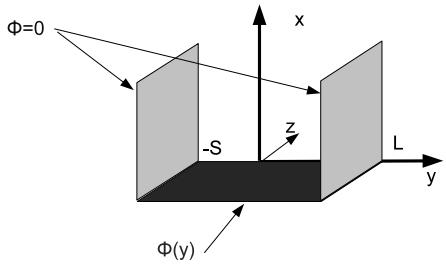

Figura 2.7: Calha-Independente de z.

Imagine que tenhamos uma calha na forma de um retângulo de tal forma que os planos $y = L$ e $y = -S$ estejam aterrados, $\phi(x, L, z) = \phi(x, -S, z) = 0$. Imagine ainda que de alguma forma fomos capazes de obter a informação sobre o valor do campo no plano $x = 0$ no intervalo $-S < y < L$, isto é, neste intervalo sabemos que $\phi(x, y, z) = \phi_0(y)$ para alguma função ϕ_0 dada. Podemos imaginar a região do espaço entre os planos como uma região fechada se incluímos que o campo no infinito se anule. Além disto a simetria do problema sugere tratar o campo como função somente de x e y já que a coordenada z não entra na sua formulação. Se tentamos uma solução como na equação (8.106) dificilmente conseguiremos atender a todos o requisitos do problema. Senão vejamos. Em $y = -S$ o campo deve se anular. Isto é conseguido fixando a constante k e a relação entre C_1 e C_2. Chamamos $C_1 = C\cos\alpha$ e $C_2 = C\sin\alpha$. A condição de o campo ser finito em $x = \infty$ requer que $\tilde{A} = 0$. O campo toma a forma então

$$\begin{aligned}
\phi_k(x, y) &= \tilde{B}e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \\
&= \tilde{B}e^{-kx}(C\cos\alpha \sin kx + C\sin\alpha \cos kx) \\
&= \tilde{B}e^{-kx}C\sin kx + \alpha \\
&\equiv \tilde{C}e^{-kx}\sin(kx + \alpha). \qquad (8.107)
\end{aligned}$$

A condição de contorno em $y = -S$ será expressa por

$$\sin(-kS + \alpha) = 0, \qquad (8.108)$$

levando a

$$\alpha - kS = n_1\pi. \qquad (8.109)$$

A condição de contorno em $y = L$ é imposta de maneira extremamente análoga, basta substituir $-S$ por L, levando à condição

$$0 = \sin(kL + \alpha) \tag{8.110}$$

e portanto a

$$\alpha + kL = n_2\pi. \tag{8.111}$$

A diferença entre as equações (8.109) e (8.111) estabelece, usando o inteiro $n = n_2 - n_1$, que

$$k = \frac{n\pi}{L+S}. \tag{8.112}$$

Ao mesmo tempo, usando o inteiro $\tilde{n} = n_1 + n_2$, obtemos que

$$\alpha = (\tilde{n} + \frac{(S-L)n}{L+S})\pi. \tag{8.113}$$

Esta equação fixa a relação entre C_1 e C_2. Por exemplo, caso $S = 0$ teremos que $C_2 = 0$. Por outro lado para $S = L$, teremos $\alpha = \tilde{n}\pi/2$ e

$$\begin{aligned} \chi &= C\sin(kx + \tilde{n}\frac{\pi}{2}) \\ &= C(\sin(\frac{n\pi x}{2L})\cos\frac{\tilde{n}\pi}{2} + \cos(\frac{n\pi x}{2L})\sin\frac{\tilde{n}\pi}{2}). \end{aligned} \tag{8.114}$$

Neste caso, $\tilde{n}$ serve para distinguir entre somente dois casos. Caso $\tilde{n}$ seja par teremos a função seno e caso $\tilde{n}$ seja ímpar teremos a função cosseno.

Falta estabelecer ainda a condição em $x = 0$ que requeria que

$$\phi_0(y) = C\sin(\frac{n\pi y}{L+S} + \frac{\tilde{n}\pi}{2} + \frac{n(S-L)\pi}{2(L+S)}). \tag{8.115}$$

Ora, isso não é possível em geral. A solução é então buscar superposições de soluções do tipo aqui encontrado. Como as demais condições de contorno são homogêneas, a consideração de superposições de soluções continua respeitando tais condições. Resta assegurar apenas a condição em $x = 0$. Por simplicidade vamos tomar o caso $S = 0$. O campo será então

$$\phi(x,y) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi y}{L} e^{-\frac{n\pi}{L}x}. \tag{8.116}$$

Somos levados a uma série de Fourier de senos para o potencial em $x = 0$:

$$\phi_0(y) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi y}{L}. \tag{8.117}$$

Por razões didáticas vamos fazer um resumo de séries de Fourier, adotando uma notação simples. Estamos interessados em uma função no intervalo $-l < y < l$. Definimos as funções

$$S_n^l(y) = \frac{\sin(\frac{n\pi y}{l})}{\sqrt{l}} \quad \text{, n=1,2,...} \tag{8.118}$$

$$C_n^l(y) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right)}{\sqrt{l}} \text{ , n=1,2,...} \tag{8.119}$$

$$C_0^l(y) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right)}{\sqrt{2l}} = \sqrt{\frac{1}{2L}} \text{ , n=0} \tag{8.120}$$

$$\tag{8.121}$$

Estas funções satisfazem as relações de ortonormalidade:

$$\int_{-l}^{l} S_n^l(y) S_{n'}^l(y) dy = \int_{-l}^{l} C_n^l(y) C_{n'}^l(y) dy = \delta_{n,n'} \tag{8.122}$$

e

$$\int_{-l}^{l} S_n^l(y) C_{n'}^l(y) dy = 0. \tag{8.123}$$

Elas formam um conjunto completo no sentido de que qualquer função bem comportada pode ser representada por uma série do tipo

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[f] C_n^l(y) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n[f] S_n^l(y) \tag{8.124}$$

com os coeficientes determinados por

$$s_n[f] = \int_{-l}^{l} S_n^l(y) f(y) dy \tag{8.125}$$

e

$$c_n[f] = \int_{-l}^{l} C_n^l(y) f(y) dy. \tag{8.126}$$

A interpretação geométrica ajuda: a integral

$$\int_{-l}^{l} f(y) g(y) dy \tag{8.127}$$

define o produto interno, $< f|g >$, entre as funções $f(y)$ e $g(y)$, vistas como elementos de um espaço linear de funções. As funções $C_n^l(y)$ e $S_n^l(y)$ podem ser vistas como elementos de uma base ortonormal $B = \{C_n, S_m\}$ neste espaço. Os coeficientes $c_n[f]$ e $s_n[f]$ são obtidos projetando cada função $f(y)$ nos elementos respectivos da base, via produto interno da função $f(y)$ com os elementos $C_n^l(y)$ e $S_n^l(y)$, $< C_n|f >$ e $< S_n|f >$. A analogia com o espaço vetorial tridimensional vale ressaltar. Os vetores $\vec{R}$ são expressos em termos da base ortogonal $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ e sujeitos ao produto interno $\vec{A}.\vec{B} = \sum_{i=1..3} A_i B_i$.

Objeto	Espaço R^3	Espaço Funcional
Vetores	$\vec{R}$	$f(y)$
Base	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{C_n(y), S_n(y)\}$
Expansão	$\vec{R} = \sum_i R_i e_i$	$f(y) = \sum_n (s_n[f] S_n(y) + c_n[f] C_n(y))$
Produto interno	$\vec{A}.\vec{B} = \|A\|\|B\| \cos\theta$	$f.g = \int f(y) g(y) dy$
em componentes	$= \sum_i A_i B_i$	$= \sum_n (c_n[f] c_n[g] + s_n[f] s_n[g])$
Ortogonalidade	$e_i.e_j = \delta_{i,j}$	$C_n.C_m = S_n.S_m = \delta_{m,n}; C_n.S_m = 0$
Componentes	$R_i = \vec{R}.e_i$	$c_n[f] = f.C_n = \int f(y) C_n(y) dy$
		$s_n[f] = f.S_n = \int f(y) S_n(y) dy$

Voltando ao nosso problema com $S = 0$, vemos que podemos expandir qualquer função definida no intervalo entre -L e +L em séries de senos e cossenos. Como nossa solução requer somar somente sobre senos podemos utilizar o ferramental das série de Fourier recorrendo ao procedimento de realizar a extensão ímpar da função $\phi_0(y)$ para o intervalo $-L < y < L$. Isto é, partindo de uma função definida inicialmente para $y > 0$, adotamos $\phi_0(-y) = -\phi_0(y)$. Esta nova função, com domínio em $-L < y < L$, poder ser expressa pela série de Fourier para esse domínio. Como ela é ímpar e os cossenos pares, os coeficientes $c_n[\phi_0]$ são nulos. Como resultado o potencial em $x = 0$ pode ser expresso em série de Fourier de senos levando à identificação dos coeficientes como

$$B_n = \int_{-L}^{L} \frac{\sin(n\pi y/L)}{L}\phi_0(y)dy = 2\int_0^L \frac{\sin(n\pi y/L)}{L}\phi_0(y)dy. \tag{8.128}$$

2.8.1 Coordenadas Cartesianas - Tridimensional

Considere o seguinte problema: um tubo infinito condutor é definido pela intersecção dos planos $z = 0$, $y = 0$, $z = a$ e $y = b$. O potencial em $x = 0$ é controlado e mantido como $\phi_0(y, z)$. Queremos encontrar o campo no interior do tubo para $x > 0$. As condições de contorno serão :

1) $\phi = 0$ para $y = 0$ e $y = b$.

2)$\phi = 0$ para $z = 0$ e $z = a$.

3)$\phi = 0$ para $x \to \infty$.

4)$\phi = \phi_0(y, z)$ para $x = 0$.

Tentando uma solução do tipo $\phi = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ a equação de Laplace no interior do tubo nos garante então que

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d^2}{dx^2}\alpha(x) + \frac{1}{\beta}\frac{d^2}{dy^2}\beta(y) + \frac{1}{\gamma}\frac{d^2}{dz^2}\gamma(z) = 0. \tag{8.129}$$

Novamente cada parcela deve ser uma constante e a soma das constantes nula. A periodicidade em y e z sugere tomar constantes negativas para os termos correspondentes. Resulta

$$\frac{d^2}{dy^2}\beta(y) = -(\frac{n\pi}{b})^2\beta(y), \tag{8.130}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\gamma(z) = -(\frac{l\pi}{a})^2\gamma(z) \tag{8.131}$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}\alpha(x) = \left((\frac{n\pi}{b})^2 + \frac{l\pi}{a})^2\right)\alpha(x). \tag{8.132}$$

As soluções serão

$$\alpha_{n,l}(x) = A_{n,l}e^{K_{n,l}x} + B_{n,l}e^{-K_{n,l}x}, \tag{8.133}$$

$$\beta_n(y) = C_n \sin(n\pi y/b) + D_n \cos(n\pi y/b), \tag{8.134}$$

$$\gamma_l(z) = E_l \sin(l\pi z/a) + F_l \cos(l\pi z/a), \tag{8.135}$$

com $K_{n,l}^2 = (n\pi/b)^2 + (l\pi/a)^2$.

As condições de contorno homogêneas nos dão: 1) n deve ser inteiro e D=0. 2) l deve ser inteiro e F=0. 3) B=0.

A solução geral satisfazendo às condições homogêneas será

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,l} C_{n,l} e^{-K_{n,l}x} \sin(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a). \tag{8.136}$$

Resta somente verificar a condição de contorno não homogênea em $x = 0$

$$\phi_0(y,z) = \sum_{n,l} C_{n,l} \sin(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a). \tag{8.137}$$

Vemos que caímos novamente no problema de expressar uma função em termos de sua série de Fourier, neste caso bidimensional. O produto de funções seno e cosseno dependentes em variáveis distintas, $\sin(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a)$ forma uma base para funções de duas variáveis, satisfazendo a relações de completeza e ortogonalidade para funções de duas variáveis no intervalo $0 < y < b$ e $0 < z < a$. Qualquer função ϕ_0 pode ser escrita da forma acima com os coeficientes dados por

$$C_{n,l} = (\frac{4}{ab}) \int_0^b dy \int_0^a dz \phi_0(y,z) \sin(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a). \tag{8.138}$$

Exercício: Verifique as condições de ortogonalidade para as funções

$$\begin{aligned} SS_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a) \quad ; \quad SC_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin(n\pi y/b)\cos(l\pi z/a); \\ CS_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \cos(n\pi y/b)\sin(l\pi z/a) \quad ; \quad CC_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cos(n\pi y/b)\cos(l\pi z/a). \end{aligned} \tag{8.139}$$

2.9 Separação de variáveis: Coordenadas esféricas

A equação de Laplace pode também ser separada um coordenadas esféricas. A equação apresenta a forma:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{9.140}$$

Adotando a forma particular, $\Phi = \alpha(r)\beta(\theta)\gamma(\varphi)$ e multiplicando a equação resultante por $r^2\sin^2\theta$ resulta em

$$0 = \sin^2\theta\left[\frac{r}{\alpha}\frac{d^2}{dr^2}(r\alpha) + \frac{1}{\beta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\beta}{d\theta})\right] + \frac{1}{\gamma}\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} \tag{9.141}$$

A dependência no ângulo φ é separada introduzindo a constante de separação de variáveis, m^2, de maneira que

$$\frac{1}{\gamma(\varphi)}\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} = -m^2\gamma(\varphi) \tag{9.142}$$

levando à solução

$$\gamma_m(\varphi) = E \sin m\varphi + F \cos m\varphi. \tag{9.143}$$

A equação de Laplace fica reescrita, dividindo por $\sin^2\theta$, como

$$0 = \frac{r}{\alpha}\frac{d^2}{dr^2}(r\alpha) + \frac{1}{\beta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{d\beta}{d\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}. \tag{9.144}$$

Agora a dependência em r se separa da em θ introduzindo a constante de separação de variáveis positivo definida como $l(l+1)$, por comodidade posterior, resultando em

$$r\frac{d^2}{dr^2}(r\alpha) = l(l+1)\alpha \tag{9.145}$$

e

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\beta}{d\theta}) = \left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l(l+1)\right]\beta. \tag{9.146}$$

As soluções da parte radial são facilmente obtidas como potências simples

$$\alpha(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}. \tag{9.147}$$

A equação em θ toma a forma, com $x = \cos\theta$,

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\beta\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\beta = 0, \tag{9.148}$$

que é a equação associada de Legendre.

Neste curso estaremos interessados principalmente no caso em que não há dependência azimutal, $m = 0$. Ficamos então com a equação de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\beta\right] + l(l+1)\beta = 0, \tag{9.149}$$

As soluções regulares em $x = \pm 1$ desta equação são os polinômios de Legendre. Usando o método de Frobenius estas soluções são encontradas. De fato escrevendo a solução como $\beta = \sum_p a_p x^{(p+s)}$, encontramos a equação

$$\sum_{p=0} a_p \left[(p+s)(p+s-1)x^{(p+s-2)} + (l(l+1) - (p+s)(p+s-1) - 2(p+s))x^{(p+s)}\right] = 0. \tag{9.150}$$

Igualando a zero o coeficiente do termo de mais baixa potência em x obtemos a equação indicial:

$$s(s-1) = 1 \tag{9.151}$$

Tomando inicialmente o caso $s = 0$ e escolhendo $a_1 = 0$ obtemos as relações de recorrência

$$a_{p+2} = \frac{-(l(l+1) - p(p+1))}{(p+2)(p+1)}a_p \tag{9.152}$$

A análise da convergência desta série quando $|x| = \pm 1$ mostra que a série diverge a menos que seja uma série com número finito de termos. A finitude é conseguida se o número l for um número

natural. Essa foi a razão para escolher a forma $l(l+1)$. Neste caso a série resultante, normalizada para que tenha o valor unitário quando x for igual a um, define os polinômios de Legendre de ordem par. Raciocínio análogo para os caso $s = 1$ leva aos polinômios de ordem ímpar. Os primeiros polinômios de Legendre são :

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{9.153}$$

A propriedades básicas dos polinômios de Legendre são, para nós:

1)$P_l(x)$ é um polinômio de grau l.

2) A paridade é par se l for par e ímpar se l for ímpar.

3)Os polinômios de Legendre formam um conjunto infinito de funções ortogonais no sentido que

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \tag{9.154}$$

4)A fórmula geral é

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}(\frac{d}{dx})^l(x^2-1)^l. \tag{9.155}$$

5)Eles formam um conjunto completo de funções entre $x = -1$ e $x = 1$. Isto é, qualquer função neste intervalo pode ser escrita como superposição linear dos polinômios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x). \tag{9.156}$$

Em virtude de 3) os coeficientes são

$$A_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx \tag{9.157}$$

6) Eles podem ser obtidos da expansão de Taylor de uma função algébrica simples, chamada função geratriz dos polinômios de Legendre:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

Podemos agora apresentar a solução geral da equação de Laplace para problemas com simetria azimutal. Somando sobre todos os coeficientes l.

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta). \tag{9.158}$$

Exemplo 1) Considere que o potencial seja conhecido na superfície esférica com $r = R$ como $\Phi(R,\theta)$. Queremos obter então o campo escalar $\phi(r,\theta)$ para $r < R$. Utilizando a equação (9.158) a solução interior requer eliminar os termos singulares em $r = 0$, o que se consegue fazendo $B_l = 0$. (Caso houvesse uma carga pontual na origem deveríamos manter o termo B_1 já que este permite o comportamento com r^{-2} necessário para uma carga pontual). Resulta

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta). \tag{9.159}$$

E os coeficientes serão dados, em função da propriedade 5) por

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi} \Phi(R,\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{9.160}$$

Por exemplo, caso $\Phi(R,\theta) = k\sin^2\theta/2$ *podemos calcular os coeficientes por inspeção sem necessitar realizar as integrais. Basta usar que* $\sin^2\theta/2 = (1-\cos\theta)/2$ *e perceber esta expressão como uma superposição dos dois primeiros polinômios de Legendre ,* P_0 *e* P_1*. Desta maneira se vê que*

$$\Phi(R,\theta) = \frac{k}{2}(1 - cos^2\theta) = \frac{k}{2}P_0(\cos\theta) - \frac{k}{2}P_1(\cos\theta). \tag{9.161}$$

Comparando com a expressão (9.159) vemos então que somente os coeficientes $A_0(= k/2)$ *e* $A_1(= k/2R)$ *são não nulos. Deste modo*

$$\Phi(r,\theta) = \frac{k}{2}(1 - \frac{r}{R}\cos\theta) \tag{9.162}$$

Exemplo 2) Vejamos agora um caso em que estamos interessados no campo exterior e não obstante não iremos anular todos os coeficientes A_l*, como seria de se esperar. Uma esfera condutora sem carga é colocada numa região onde existe um campo elétrico uniforme aplicado na direção* $\hat{z}$ *de módulo* E_0*. Queremos o campo na região externa à esfera. O ponto de partida novamente é a expressão (9.158). Para as condições dadas mantemos o termo com* $A_1 \neq 0$*:*

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) - E_0 r P_1(\cos\theta). \tag{9.163}$$

O último termo permite reproduzir o comportamento no infinito. A condição de contorno a ser imposta agora é $\Phi = 0$ *sobre a esfera. Esta condição dá* $B_l = 0$ *para todos os termos exceto para* $l = 1$*. Para este valor de l obtemos que* $B_1 = E_0 R^3$ *para que o potencial se anule na superfície esférica. Depois se calcularmos a derivada em relação a r e relacionarmos a descontinuidade da componente radial do campo elétrico com a densidade superficial de cargas, eq. (3.58), obtemos*

$$\sigma(\theta) = e\epsilon_0 E_0 \cos\theta. \tag{9.164}$$

Exemplo 3) Uma superfície esférica de raio R carrega uma densidade de cargas conhecida, $\sigma(\theta)$*. Vamos calcular o campo em todo o espaço. Para* $r < R$ *teremos*

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)). \tag{9.165}$$

Para $r > R$ *teremos*

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos(\theta)). \tag{9.166}$$

As condições de contorno serão :

1)Continuidade do potencial:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l P_l - B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos(\theta)) = 0. \tag{9.167}$$

Daí, teremos $B_l = A_l R^{2l+1}$.

2) Descontinuidade na componente normal, eq. (3.58).

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta). \tag{9.168}$$

Daí

$$A_m = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{m-1}}\int_0^{\pi}\sigma_0(\theta)P_m(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta. \tag{9.169}$$

Caso particular importante: Se $\sigma = k\cos(\theta)$ *então o único coeficiente não nulo será* $A_1 = k/3\epsilon_0$. *O campo toma a forma:*

$$\phi = \frac{k}{3\epsilon_0} r\cos(\theta), \tag{9.170}$$

para $r < R$ *e*

$$\phi = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} r^{-2}\cos(\theta), \tag{9.171}$$

para $r > R$.

2.9.1 Coordenadas esféricas - Caso geral

Sem simetria azimutal, com dependência em θ e φ as equações separadas são :

1)

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\gamma(\varphi) = -m^2\gamma(\varphi), \tag{9.172}$$

cuja solução geral será

$$\gamma(\varphi) = E\sin(m\varphi) + F\cos(\varphi) = E^{+}e^{\imath m\varphi} + E^{-\imath m\varphi}. \tag{9.173}$$

2)

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}\alpha(r)) = l(l+1)\alpha(r), \tag{9.174}$$

com a solução geral

$$\alpha(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}. \tag{9.175}$$

3)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\beta(\theta)) = [-l(l+1) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}]\beta(\theta). \tag{9.176}$$

Esta equação, chamada equação associada de Legendre, apresenta as funções associadas de Legendre como as soluções regulares em $\theta = \pm\pi$. Chamando $x = \cos(\theta)$ as funções associadas de Legendre são definidas por

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l, \tag{9.177}$$

onde $-l-1 < m < l+1$. As funções para m negativo são na verdade proporcionais às com m positivo, $P_l^{-m} = cte.P_l^m$.

É conveniente agrupar as funções de θ e ϕ em um só conjunto de funções chamadas de harmônicos esféricos:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{\imath m\phi}. \tag{9.178}$$

Os harmônicos esféricos formam um conjunto completo de funções angulares, funções definidas na superfície esférica. Qualquer função de θ e ϕ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ pode ser escrita como superposição destas funções.

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{l,m}Y_l^m(\theta,\phi). \tag{9.179}$$

As relações de ortonormalidade se escrevem:

$$\int d\Omega(Y_l^M(\theta,\phi)^*Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{9.180}$$

Das duas últimas equações decorre que

$$C_{l,m} = \int d\Omega(Y_l^M(\theta,\phi)^* f(\theta,\phi). \tag{9.181}$$

A solução geral usando coordenadas esféricas será:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{l,m}r^l + B_{l,m}r^{-(l+1)})Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{9.182}$$

Os primeiros harmônicos esféricos são:
$Y_0^0 = \frac{1}{4\pi}$,
$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm\imath\varphi}$,
$Y_l^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$,
$Y_2^{\pm\imath 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2\imath\varphi}$,
$Y_2^{\pm\imath 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm\imath\varphi}$,
$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$.

Exemplo: Qual a solução interior à esfera de raio R sabendo que na superfície da esfera $\phi(R,\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\theta\cos\varphi$.

Solução : A solução interior sendo regular na origem requer que as potências negativa de r não estejam presentes. A solução geral se reduz a

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{l,m}r^l Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{9.183}$$

Os coeficientes podem ser obtidos da equação (9.181), ou por inspeção notando que

$$\phi(R,\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\theta\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Y_2^1 - Y_2^{-1}), \tag{9.184}$$

e assim se conclui que

$$\phi(r,\theta,\varphi) = (\frac{r}{R})^2 \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \tag{9.185}$$

é a solução geral satisfazendo à condição de contorno na origem e na superfície esférica de raio R. Não nos delongaremos neste curso no uso das soluções sem simetria azimutal.

2.9.2 Separação de variáveis - Coordenadas cilíndricas

O Laplaciano em coordenadas cilíndricas se escreve

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi. \tag{9.186}$$

Novamente tentamos soluções do tipo produto de funções

$$\Phi = \alpha(r)\beta(\varphi)\gamma(z). \tag{9.187}$$

Substituindo na equação de Laplace e dividindo por Φ obtemos

$$0 = \frac{1}{\alpha r}\frac{d}{dr}(r\frac{d\alpha}{dr}) + \frac{1}{\beta r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\beta + \frac{1}{\gamma}\frac{d^2}{dz^2}\gamma. \tag{9.188}$$

Separamos a dependência em z introduzindo a constante de separação k^2, considerada positiva:

$$\frac{d^2}{dz^2}\gamma = k^2\gamma. \tag{9.189}$$

A solução desta equação se torna

$$\gamma(z) = F^+e^{kz} + F^-e^{-kz}. \tag{9.190}$$

A dependência em φ também se separa

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\beta = -m^2\beta, \tag{9.191}$$

com solução geral

$$\beta(\varphi) = c\cos m\varphi + d\sin m\varphi. \tag{9.192}$$

A equação radial se escreve

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d\alpha}{dr}) - \frac{m^2\alpha}{r^2} + k^2\alpha. \tag{9.193}$$

Vamos tratar primeiro de caso $k = 0$ em que não há dependência em z.
A solução geral para $m > 0$ é

$$\alpha(r) = Ar^m + Br^{-m}. \tag{9.194}$$

Enquanto que para $m = 0$ as duas soluções independentes levam a

$$\alpha(r) = A + B \ln r. \tag{9.195}$$

A solução geral se escreve,

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[r^m (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) + r^{-m}(C'_m \cos m\varphi + D'_m \sin m\varphi) \right] + A_0 + B_0 \ln r. \tag{9.196}$$

Exercício resolvido: A campo na superfície de um cilindro de raio $r = R$ é conhecido, $\phi(R, z, \varphi) = \phi_0(\varphi)$. Na origem há uma linha de cargas uniforme ao longo do eixo z com densidade linear λ_0. Encontre o campo no interior do cilindro. Supondo que não haja dependência em z, o campo ϕ apesenta a forma geral eq. (9.196). A condição de contorno na origem, $r = 0$ nos dá

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} r^m (C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi)) + B_0 ln(r) \tag{9.197}$$

onde $B_0 = -\lambda/2\pi\epsilon_0$. Particularizando para $r = R$ vemos que

$$C_m R^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \tag{9.198}$$

e

$$D_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi \tag{9.199}$$

No caso geral, com dependência em z a equação pode ser reescrita como

$$r\frac{d}{dr}(r\frac{d\alpha}{dr}) - m^2\alpha + (kr)^2\alpha = 0. \tag{9.200}$$

A solução geral é dada, para $k \neq 0$ pelas funções de Bessel ou Neumann:

$$\alpha(r) = AJ_m(kr) + BN_m(kr) \tag{9.201}$$

As funções de Bessel para m fixo formam um conjunto completo de funções, para o caso interior $r \leq R$ por exemplo. Para exemplificar o uso das funções de Bessel na solução de problemas de contorno vamos apresentar a propriedade de completeza das funções de Bessel. As raízes da equação

$$J_m(kR) = 0, \tag{9.202}$$

formam um conjunto infinito, $k_{n,m}r = \alpha_{n,m}$. Para m fixo as diferentes funções $J_m(k_{n,m}r)$ variando sobre todos os $n's$ formam funções ortogonais com a relação de ortogonalidade escrita

$$\int_0^R r J_m(k_{m,n}r) J_m(k_{m,n'}r) dr = \delta_{n,n'} R^2 J_{m+1}(k_{m,n}R)/2. \tag{9.203}$$

Qualquer função entre 0 e R pode ser escrita na forma da série de Fourier-Bessel

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(k_{m,n} r), \tag{9.204}$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_m^2(k_{m,n} R)} \int_0^{\infty} r F(r) J_m(k_{m,n} r) dr. \tag{9.205}$$

2.10 Visão geral: O problema de Sturm-Liouville

O procedimento de separação de variáveis nos levou a diferentes equações diferenciais ordinárias conforme o sistema de coordenadas utilizado. Em todos os casos chegamos a uma equação do tipo de Sturm-Liouville, que é caracterizada pela forma

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{df(x)}{dx}\right) - S(x)f(x) = \lambda R(x) f(x), \tag{10.206}$$

ou

$$\mathcal{L}F(x) = \lambda R(x) F(x), \tag{10.207}$$

onde $\mathcal{L}$ é o operador linear de Sturm-Liouville, $\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d}{dx}\right) - S(x)$, $R(x)$ é a função peso, λ o auto-valor e a solução $f(x)$ é chamada de auto-função do operador $\mathcal{L}$.

O operador apresenta a propriedade de ser auto-adjunto:

$$\int_{x_a}^{x_b} g(x)\mathcal{L}f(x)dx = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\mathcal{L}g(x)dx, \tag{10.208}$$

desde que a equação diferencial seja suplementada com condições de contorno adequadas em $x = x_a$ e $x = x_b$. De fato integrando por parte duas vezes a integral do lado direito se obtém a do lado esquerdo da equação 10.208 se

$$\left[f(x)P(x)\frac{dg}{dx} - g(x)P(x)\frac{df}{dx}\right]_{x=x_a} = \left[f(x)P(x)\frac{dg}{dx} - g(x)P(x)\frac{df}{dx}\right]_{x=x_b}. \tag{10.209}$$

As condições de contorno devem garantir essa condição.

Nestas condições, a análise do problema de Sturm-Liouville leva às conclusões

1)Há um número infinito enumerável de auto-valores λ_n e todos são reais.

2)As auto-funções, $f_n(x)$ e $f_m(x)$, de auto-valores distintos, $\lambda_n \neq \lambda_m$, são ortogonais

$$\int_{x_a}^{x_b} f_n(x) f_m(x) R(x) dx = 0. \tag{10.210}$$

De fato, isso decorre imediatamente do caráter auto-adjunto do operador. Basta aplicar a equação 10.208 às duas funções f_n e f_m e usar a equação de Sturm-Liouville original. As auto-funções devem satisfazer às condições de contorno adequadas para garantir o caráter auto-adjunto.

3) As auto-funções formam um conjunto completo. Qualquer função no intervalo considerado pode ser escrita como superposição delas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) c_n. \tag{10.211}$$

Questão: para cada caso de separação de variáveis que já discutimos, identifique quais equações tomaram a forma de Sturm-Liouville e identifique a variável x, o operador, a função peso e o auto-valor para cada caso.

Analisaremos um pouco mais detidamente o caso da equação de Laplace em coordenadas cartesianas. Vamos nos restringir a uma dimensão. Nesse problema fomos levados à série de Fourier. Nesse caso $P(x) = R(x) = 1$, $S(x) = 0$ e $x_b = -x_a = L$ e a equação diferencial é

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \lambda f. \tag{10.212}$$

O caráter auto-adjunto é obtido se a equação 10.209 for válida:

$$\left[f(x)\frac{dg}{dx} - g(x)\frac{df}{dx} \right]_{x=-L} = \left[f(x)\frac{dg}{dx} - g(x)\frac{df}{dx} \right]_{x=L}. \tag{10.213}$$

Essa condição se verifica para as funções $\sin(n\pi x/L)$ e $\cos(n\pi x/L)$, já que elas são periódicas. O conjunto de auto-funções $f_n(x)$ é identificado como o conjunto dessas funções seno e cosseno. Os auto valores são identificados como $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$. Nesse caso eles são ditos degenerados, já que há duas soluções distintas, se $\lambda \neq 0$.

Uma questão mais delicada é a da caracterização da completude co conjunto das "'funções de Fourier"', ou sobre o quão bem uma função qualquer pode ser expressa, de maneira biunívoca preferencialmente, como uma série de Fourier. Em geral os físicos delegam essa questão para os matemáticos. Se você preferir, pode prescindir da discussão a seguir. Mas se você tiver pendências por um melhor entendimento da descrição matemática da Física, talvez se interesse por ela. Vale aqui descrever, de maneira extremamente esquemática alguns resultados dessa análise. Para poupar escrita vou fazer $L = \pi$. Primeiro é preciso que os coeficientes da série de Fourier estejam bem definidos, para uma função poder ser expressa como série de Fourier. Assim,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx \qquad \text{e} \qquad s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx \tag{10.214}$$

devem estar bem definidos[†]. As integrais precisam ser convergentes. Além disso a questão mais delicada: é preciso ter claro o que se pretende como "convergência"da série de Fourier. Podemos dividir em duas classes de convergência: convergência em média ou convergência pontual.

Primeiro a convergência em média. Imagine que a série de Fourier de uma função $f(x)$ seja truncada, os termos sejam somados somente até uma ordem N (de $n = 0$ até $n = N$) arbitrariamente alta, mas finita. Para cada valor de N, teremos uma função bem definida, formando uma sequência de funções à medida que aumentamos N. Dizemos que a sequência dessas séries somadas converge em média, se a integral (do quadrado) da diferença da função para cada membro da sequência converge para zero. Explicando: $f_N(x) \longrightarrow f(x)$, em média, onde

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} s_n \sin(nx), \tag{10.215}$$

[†]Um fator $\sqrt{2}$ adicional deve estar presente para c_0

e c_n e s_n são os coeficientes da série de Fourier, 10.214. E, a convergência em média significa

$$\lim_{N\to\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f_N(x)\right)^2 dx\right]=0. \tag{10.216}$$

A análise nesse caso leva a resultados facilmente entendidos: Qualquer função que seja integrável e cujo quadrado também seja integrável, diz-se função do tipo $\mathcal{L}^2$, pode ser aproximada por sua série de Fourier no sentido acima. A correspondência não é biunívoca, entretanto. Duas funções que diferem em "somente alguns pontos"podem ter a mesma série de Fourier. De fato a integral do quadrado das diferenças dessas funções é nula. A solução para tornar a série biunívoca leva à identificação dessas funções como se fossem um único ente matemático: duas funções que diferem num número devidamente pequeno de pontos são ditas (quase)-iguais, são identificadas. O tratamento formal dessa situação leva à teoria da medida e à necessidade de desenvolver a integração de Lebesgue, que pode ser vista como uma generalização da integração de Riemann. O recurso à convergência em média pode parecer natural no formalismo da mecânica quântica, que utiliza integrais para obter grandezas com significado físico direto, a partir das funções de onda. No estudo, por exemplo, do electromagnetismo, pode parecer um tanto estranho.

Quanto à convergência pontual: a série de Fourier calculada em um dado ponto representa a função original tão bem quanto se queira, nesse ponto?

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) =? f(x). \tag{10.217}$$

A convergência em média não garante a convergência pontual, como se deduz da não univocidade da série. Para se obter a convergência pontual da série de Fourier deve-se também restringir a classe de funções que se pretende representar. Esse problema recebeu a atenção de vários matemáticos que estabeleceram diferentes condições **suficientes** para que uma função tenha uma série de Fourier que convirja pontualmente. Até onde eu saiba não há uma caracterização geral com condições ao mesmo tempo necessárias e suficientes. Uma condição suficiente para a convergência, de abrangência bastante ampla, pode ser estabelecida(ver Courant and Hilbert) requerendo-se que a função seja "suave por partes". Quer dizer: a função deve ser contínua por partes e sua derivada primeira também deve ser contínua por partes(esse ultimo requerimento pode ser suavizado: basta que a derivada seja $\mathcal{L}^2$. Então, a série de Fourier converge pontualmente. Ademais, nos intervalos fechados em que a função é contínua a convergência é uniforme: pode-se comparar a sequência de funções $f_N(x)$, para x no intervalo fechado, com um única sequência numérica convergente o que garante a convergência(uniforme) da sequência de funções. Nos pontos em que há descontinuidade, a convergência não é uniforme: Para cada valor de x que se aproxima do ponto de descontinuidade, se pode garantir a convergência da série, mas a análise da convergência é ponto-a-ponto. Mais interessante, se a função apresenta uma descontinuidade como pode a série convergir? Para qual valor, o obtido aproximando-se do ponto de descontinuidade pela esquerda ou pela direita? Resposta: para o valor médio dos dois:

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}(f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon)). \tag{10.218}$$

A convergência uniforme da série é muito bem-vinda: pode-se integrar a série termo a termo. Como disse, esse critério - ser suave por partes - não é necessário, mas apenas suficiente. Existem funções que não são suaves por partes mas que tem uma série de Fourier convergente. Por exemplo (ver

Djairo Figueiredo) se a função é tal que $|\Delta f| < K|\Delta x|^{\alpha}$ numa vizinhança fechada de um ponto, onde K a α são positivos, pode-se deduzir a continuidade da função mas não necessariamente de suas derivadas. A função que satisfaz a esse critério é chamada de contínua à Holder, e terá a série de Fourier convergente, mesmo que a derivada da função seja divergente nesse ponto. Outro exemplo é de "'funções de variação limitada"'. A função é de variação limitada se a soma das variações da função em uma partição de um intervalo fechado for limitada por um valor independente da partição. Nesse caso pode ser que a derivada da função apresente um número infinito (mas contável) de descontinuidades e portanto a função também não ser contínua por partes. Essas funções também tem séries de Fourier convergentes pontualmente.

Quais consequências físicas se pode obter dessa discussão? Por exemplo ao atravessar um plano com densidade superficial de cargas o campo elétrico é descontínuo. A derivada de uma série de Fourier do campo escalar na variável cartesiana normal à superfície não converge uniformemente na vizinhança do plano. Daí, se a série de Fourier do campo elétrico for integrada, no entorno do plano, termo a termo, pode não resultar na variação do potencial. Por outro lado, se um plano porta uma distribuição superficial de momentos de dipolo, o próprio campo escalar apresenta descontinuidade: a sua série de Fourier não converge uniformemente e a integral termo a termo não é garantida.

2.11 Expansão em multipolos

Trata-se de um procedimento para obter uma expressão para o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas localizada numa "pequena"região do espaço, válida para longas distâncias da fonte, de tal forma que o campo é expresso como uma soma(infinita) de termos cada um proporcional a potências inversas do raio (Também se pode tratar do caso inverso: as fontes distantes e o campo próximo de um ponto). Já vimos que o potencial elétrico expresso em coordenadas esféricas se apresenta, para o problema exterior, na forma

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) r^{-(l+1)}. \tag{11.219}$$

Ocorre que os coeficientes a_l^m podem ser relacionados a propriedades da distribuição das cargas que estejam em uma região finita do espaço. Estas propriedades são os momentos de multipolos.

Para começar, considere uma distribuição de cargas com densidade volumétrica $\rho(\vec{r}')$ distribuída numa região do espaço, $\mathcal{V}$, que vamos definir como uma esfera de raio R. Todas as cargas estão em pontos com $r' < R$. O campo escalar é, calculado no ponto de observação $\vec{r}$ é

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r} d^3 r', \tag{11.220}$$

onde $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Para pontos de observação fora da região $\mathcal{V}$ teremos que $r > R > r'$. Deste modo podemos expandir $(\Delta r)^{-1}$ em potências de $r'/r < 1$:

$$\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{r}(1 + (r'/r)^2 - 2r'/r \cos\widetilde{\theta})^{-1/2}, \tag{11.221}$$

onde $\widetilde{\theta}$, agora, é o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, isto é, entre ponto de observação e fonte:

$$\cos\widetilde{\theta} = \frac{\vec{r}.\vec{r}'}{rr'} = \frac{r_j}{r}.\frac{r'_j}{r'} = \hat{r}_i.\hat{r}'_i.$$

Note que a última expressão evidencia que $\widetilde{\theta}$ depende da variável $\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi)$ (igualmente para $\vec{r}'$) apenas através dos ângulos, e não da coordenada radial r (ou r').

A função $\frac{1}{\Delta r}$, vista como função da variável r, satisfaz á equação de Laplace e como não depende do ângulo azimutal apresenta expansão em séries de potencias de r'/r, para pontos fora da região $\mathcal{V}$, que se escreve da forma

$$\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} a_l(\frac{r'}{r})^l P_l(\cos\widetilde{\theta}) \tag{11.222}$$

Os coeficientes a_l são facilmente calculados se tomamos $\widetilde{\theta} = 0$, usamos que $P_l(1) = 1$ e expandimos o lado esquerdo em potências, o que é fácil neste caso. Obtém-se então o resultado extraordinariamente elegante $a_l = 1$. Acabamos de derivar a propriedade da função geratriz dos polinômios de Legendre, eq(9.156). Levando este resultado de volta à lei de Coulomb para o potencial resulta

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{(l+1)}}\int_{\mathcal{V}}(r')^l P_l(\cos\widetilde{\theta})\rho(\vec{r}')d^3r' \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\phi^l(\theta,\varphi)}{r^{l+1}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\phi^{(l)}(\vec{r}). \tag{11.223}$$

Este é o resultado procurado. Ele expressa o campo como uma superposição de termos, $\phi^{(l)}(\vec{r})$, cada qual com uma dependência de r específica, $r^{-(l+1)}$. **São os termos de multipolo**. Vemos que para longas distâncias os termos são ordenados hierarquicamente: em geral o termo de monopolo é dominante, o de dipolo sub-dominante, o de quadripolo sub-sub-dominante, etc. Para obter a forma particular de cada termo de multipolo é preciso realizar um integral da densidade de cargas multiplicada por uma potência de r'. Esta integral será rotulada em termos de **momentos de multipolos**, que ficarão definidos após reescrever $P_l(\cos\theta) = P_l(\hat{r}_j\hat{r}'_j)$ e fatorar a variável r da integral.

Vejamos os primeiros termos.

Para $l = 0$ a integral se escreve

$$Q = \int_{\mathcal{V}}(r')^0 P_0(\cos\widetilde{\theta})\rho(\vec{r}')d^3r' = \int_{\mathcal{V}}\rho(\vec{r})d^3r. \tag{11.224}$$

Este momento, chamado **momento de monopolo**, é nada mais que a carga total, um escalar. O **campo de monopolo**, a contribuição de ordem $l = 0$ fica sendo

$$\phi^{(0)}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{11.225}$$

Para $l = 1$ a integral fica, chamando $\hat{r}_j \equiv \frac{r_j}{r} = \frac{x_j}{\sqrt{x_i x_i}}$,

$$\int_{\mathcal{V}}\rho(\vec{r}')r'\cos\theta d^3r' \;=\; \int_{\mathcal{V}}\rho(\vec{r}')r'_j\hat{r}_j d^3r' = \hat{r}_j\int_{\mathcal{V}}\rho(\vec{r}')r'_j d^3r' \equiv \hat{r}_j P_j, \tag{11.226}$$

onde fomos obrigados a definir o **momento de dipolo** como sendo o vetor $\vec{P}$ com componentes

$$P_j = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) r'_j \tag{11.227}$$

de modo a que o **campo de dipolo** seja

$$\phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{(\hat{r}_j) P_j}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{11.228}$$

Os termos de ordem maiores em potências inversas de r podem todos ser expressos como o produto de $r^{-(l+1)}$ por integrais de potências do tipo r'^l pela densidade de cargas. Por exemplo o termo de quadrupolo pode ser expresso como $1/(4\pi\epsilon_0 r^3)$ vezes a integral

$$\begin{aligned} \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta)\rho(\vec{r}') &= \int d^3r' r'^2 (\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1))\rho(\vec{r}') \\ &= \int d^3r' r'^2 (\frac{1}{2}(3 r_i \hat{r}'_i r_j \hat{r}'_j - \hat{r}'_i \hat{r}'_j \delta_{ij}))\rho(\vec{r}') \equiv \frac{1}{2}\hat{r}_i \hat{r}_j Q_{i,j}, \end{aligned} \tag{11.229}$$

onde definimos o momento de quadrupolo por meio de

$$Q_{i,j} = \int d^3r (3 r_i r_j - r^2 \delta_{i,j})\rho(\vec{r}). \tag{11.230}$$

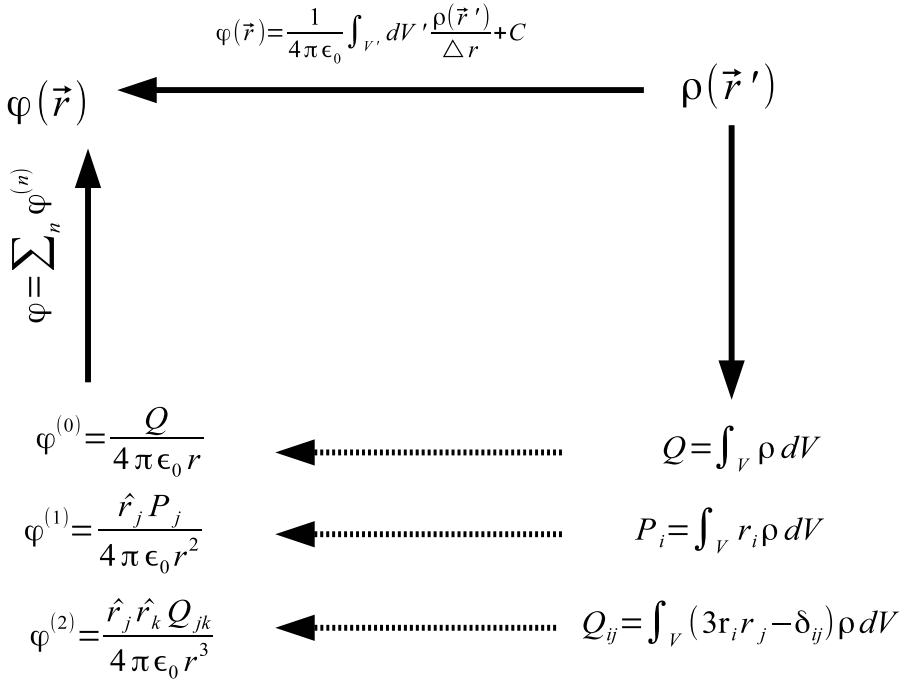

Figura 2.8: Resumo multipolos.

Essa grandeza é um tensor de segunda ordem. Quer dizer: suas duas componentes mudam da forma $Q'_{i,j} = \Lambda_{ik}\Lambda_{jn}Q_{kn}$, quando se realiza uma rotação que leva $x_i \to x'_j = \Lambda_{jk}x_k$.

O campo de quadrupolo será

$$\phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{(\hat{r}_i\hat{r}_j)Q_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{11.231}$$

Em todos os casos apresentados o campo se mostrou como o produto de um fator do tipo $r^{-l-1}/(4\pi\epsilon_0)$ por contrações de (produtos) de $\hat{r}_j$ pelos momentos de multipolos correspondentes. O momento de monopolo foi um escalar, o de dipolo um vetor e o de quadrupolo um tensor de segunda ordem.... O momento de ordem genérica N envolverá um polinômio de Legendre desta mesma ordem, correspondendo a uma potência máxima de $cos^N\theta = (\hat{r}_j\hat{r}'_J)^N$. Não é difícil generalizar o tensor para ordem arbitrária, não é mesmo? O campo de uma distribuição genérica de cargas será uma superposição de termos de multipolos. Mas para que essa expansão se presta? Se estamos a longas distâncias, o campo de multipolo de ordem l cai mais rapidamente que o de ordem l' se $l > l'$. Assim, para distâncias muito grandes pode fazer sentido tomar somente o primeiro termo, $l = 0$, isto é aproximar o campo como sendo o produzido somente por uma carga no origem igual à soma de todas as cargas. Ou, talvez faça sentido usar os dois primeiros termos, um que cai com $1/r$ acrescido de outro que cai com $1/r^2$, o que capta informação da carga total e do momento de dipolo da distribuição. Ou, quem sabe, truncar numa dada ordem mais alta? Considere por exemplo a molécula de água, H_2O. Ela apresenta carga total nula, mas as cargas se distribuem de forma que resulta um momento de dipolo elétrico. A longas distâncias, talvez faça sentido aproximar o campo criado por essa molécula como se fosse o de um dipolo pontual.

Não é difícil imaginar distribuições de cargas em que somente um termo de monopolo seja não nulo. Por exemplo, para uma carga puntiforme somente o momento de monopolo será não nulo. Por outro lado se tomamos duas cargas opostas (q e -q) distantes de d o momento de dipolo será um vetor apontando da carga negativa para a positiva com módulo $P = qd$. Esta distribuição tem momento de monopolo nulo mas apresenta momentos de multipolos de ordens maiores que $l = 1$ distintos de zero. Isto define um "dipolo" físico, não pontual. Se tomamos, no entanto, o limite quando $d \to 0$ com o produto qd fixo é fácil ver que o momento de quadrupolo se anula, assim como todos os momentos de ordem superior. Isto define um dipolo pontual: o campo criado por essa configuração idealizada de cargas somente tem o campo de dipolo, com $l = 1$. Um quadrupolo pontual pode ser formado pela superposição de dipolos físicos com direções opostas próximos um do outro e depois tomando o limite quando as quatro cargas coalescem. Esta distribuição imaginária apresenta somente momento de quadrupolo não nulo. Assim se definem distribuições de carga hipotéticas em que somente um dos momentos é distinto de zero. Essas distribuições de cargas hipotéticas podem ser expressas como densidades de cargas singulares. Um monopolo pontual é descrito como uma densidade em que $\rho^{(0)}(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, um dipolo pontual como $\rho^{(1)}(\vec{r}) = -P_j\partial_j\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, um quadrupolo pontual como $\rho^{(2)}(\vec{r}) = Q_{jk}\partial_j\partial_k\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, etc(veja por exemplo V. Namias, Am. J. Phys **45** 1977 624.). É um bom exercício partir dessas distribuições de carga e obter as expressões dos campos.

Exercício. Partindo de cada uma das expressões acima, $\rho^{(0)}$, $\rho^{(1)}$ e $\rho^{(2)}$, obtenha os campos de monopolo, dipolo e quadrupolo.

Os momentos de multipolos, que não o de monopolo, dependem em geral da escolha que fizemos da origem das coordenadas. Porém, quando os momentos de multipolos de ordem inferior se anulam, o primeiro momento não nulo não depende da origem. Isto é fácil de ver no caso do momento de dipolo. Se tomamos a nova origem como o ponto $\vec{R}$ então $\vec{r}' = \vec{\tilde{r}}' + \vec{R}$. Aqui $\vec{\tilde{r}}'$ é o vetor que localiza o ponto $\vec{r}'$ em relação à nova origem. Resulta assim

$$P_i = \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'_i \quad = \quad P_i = \int d^3r' \rho(\vec{r}')(\tilde{r}'_i + R_i) \tag{11.232}$$

$$= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \tilde{r}'_i + \int d^3r' \rho(\vec{r}') R_i \tag{11.233}$$

$$= \tilde{P}_i + QR_i. \tag{11.234}$$

Ou seja a variação do momento de dipolo é (-) a variação da posição da origem vezes o momento de monopolo. Para termos de multipolo maiores há resultados análogos. A variação do momento de quadrupolo depende linearmente do momento de monopolo e do de dipolo.

Também é fácil obter a propriedade de aditividade: se um sistema físico é separado arbitrariamente em dois subsistemas, com densidades ρ_a e ρ_b, cada momento de monopolo do sistema todo é a soma dos momentos de monopolos correspondentes a cada parte, por exemplo: $P_i = \int d^3r\, r_i(\rho(\vec{r})) = \int d^3r\, r_i(\rho_a(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r})) = P_{ai} + P_{bi}$.

Exercício: Mostre que a variação do momento de quadrupolo se escreve em termos da variação da origem, vezes o momento de dipolo, somado com outro termo que é da forma da variação da origem ao quadrado vezes o momento de monopolo.

Sabendo qual é o campo escalar produzido por um multipolo obtemos o campo vetorial, o campo elétrico $\vec{E}$, por derivação. O campo devido ao dipolo será

$$-E_i \quad = \quad \partial_i \frac{P_j r_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{11.235}$$

$$= \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^6}(P_j(\partial_i r^j)r^3 - P_j r_j \partial_i r^3) \tag{11.236}$$

$$= \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^6}(P_j \delta_{i,j} r^3 - 3P_j r_j r r_i) \tag{11.237}$$

$$= \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(P_i - 3P_j \hat{r}_j \hat{r}_i) \tag{11.238}$$

$$= \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\vec{P} - 3(\vec{P}.\hat{r})\hat{r})_i \tag{11.239}$$

Exercício resolvido: Queremos calcular os momentos de multipolo associados a uma distribuição superficial de cargas esférica, com raio R, e dependência angular do tipo $\sigma = k\cos\theta$. De fato nós já calculamos o campo criado por esta distribuição, seção 1.9, e vimos que ela produz um campo fora da esfera dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{kR^3\cos\theta}{3\epsilon_0 r^2} \tag{11.240}$$

comparando com a expansão de multipolos vemos que este campo corresponde exatamente ao campo de dipolo com momento de dipolo dado por

$$\vec{P} = \frac{kR^3}{3}\hat{z}. \tag{11.241}$$

Concluímos então que os demais termos de multipolos são ausentes, os respectivos momentos de multipolos são nulos.

Exercício: Calcule diretamente da definição, os momentos de monopolo e dipolo da distribuição acima.

Exercício: Mostre que o valor médio do campo elétrico calculado no interior de uma esfera de raio R produzido por uma carga q localizada em $\vec{r}'$, com $r' < R$ coincide com o campo criado no ponto $\vec{r}'$ por uma esfera uniformemente carregada de raio R e carga $-q$:

$$\vec{E}_{médio\text{-}esfera} = \frac{3q}{(4\pi\epsilon_0)4\pi R^3} \int \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta r^3} d^3r'.$$

Expresse o resultado em termos de momento de dipolo da carga pontual em $\vec{r}'$ (calculado no sistema de referência com centro em $\vec{0}$). Generalize o resultado para uma distribuição de cargas qualquer:

$$\vec{E}_{médio\text{-}esfera} = -\frac{\vec{P}}{(4\pi\epsilon_0)R^3}.$$